ГОЛОВНЕ УПРАВЛІННЯ ОСВІТИ І НАУКИ ЧЕРКАСЬКОЇ ОБЛАСНОЇ ДЕРЖАВНОЇ АДМІНІСТРАЦІЇ
ЧЕРКАСЬКИЙ ОБЛАСНИЙ ІНСТИТУТ ПІСЛЯДИПЛОМНОЇ ОСВІТИ ПЕДАГОГІЧНИХ ПРАЦІВНИКІВ ЧЕРКАСЬКОЇ ОБЛАСНОЇ РАДИ

Для системи післядипломної
педагогічної освіти

ВИЯВЛЕННЯ ТВОРЧО ОБДАРОВАНИХ ДІТЕЙ. ПІДГОТОВКА УЧНІВ ДО МАТЕМАТИЧНИХ ОЛІМПІАД ТА КОНКУРСІВ

програма творчої майстерні для вчителів математики

Черкаси
2012

Барвінок Р.Л., учитель математики Черкаського фізико-математичного ліцею Черкаської міської ради, вища кваліфікаційна категорія, учитель-методист

Схвалено до впровадження Вченої ради Черкаського ОІПОПП.
Протокол №3 від 31.08.2012 року

Пояснювальна записка

Актуальність: Кожен обдарований учень – індивідуальність, яка потребує особливого підходу. Сприяння реалізації обдарування потребує організації особливого середовища. Найважливішим в організації роботи з обдарованими учнями є створення загального «поля креативності», яке сприятиме розвитку творчих здібностей учнів, вчителів.

Тому існує необхідність підтримки тих представників здібної учнівської молоді, хто прагне високого рівня освіти та хотів би прилучитися до різноманітних форм дослідницької діяльності. Розвиток сучасної математичної освіти не можливий без виявлення в школах творчо обдарованих учнів.

Мета творчої майстерні:

- Спрямування професійного та творчого потенціалу вчителів математики на створення умов для виявлення та розвитку потенційної обдарованості учнів.
- Поглиблення знань педагогічних працівників про сучасні методологічні засади розвитку життєвої компетентності учнів.
- Створення моделі позакласної роботи з метою підготовки учнів до участі у конкусних математичних змаганнях.

Завдання:

Систематизувати знання щодо: виявлення обдарованих дітей та організаційних форм роботи з ними; розв'язування олімпіадних задач, нестандартних завдань, вирішення проблемних ситуацій через глибоку систематизацію знань програмового матеріалу;

Сформувати вміння (навички): відбору основних тем для планування позакласних занять з учнями; розв'язувати нестандартні задачі, а також задачі олімпіадного рівня з достатнім евристичним навантаженням, які розвивають стійкий пізнавальний математичний інтерес.

Розвинути установки до:

- креативності та постійного творення власної педагогічної системи роботи з обдарованими учнями;
- самовдосконалення;
- забезпечення сприятливих соціальних, психологічних, педагогічних умов для актуалізації багатогранних творчих задатків учнів.

Очікувані навчальні результати:

Знання:

- ознак та типів обдарованих учнів;
- основних ідей та методів розв'язування нестандартних задач.

Уміння: аналізувати, робити узагальнені висновки, використовувати основні ідеї та методи розв'язування нестандартних задач при розв'язуванні нових проблем.

Установки до:

- креативності та постійного творення власної педагогічної системи роботи з обдарованими учнями;

– самовдосконалення;
– забезпечення сприятливих соціальних, психологічних, педагогічних умов для актуалізації багатогранних творчих задатків учнів.

Набуття досвіду:

– планування та розробки навчальних занять по підготовці учнів до конкурсних змагань;
– вирішувати нові проблеми, розв’язувати нестандартні та олімпіадні задачі.

Навчальна стратегія творчої майстерні:

Реалізація завдань для досягнення результатів творчої майстерні здійснюється шляхом:

– розгляду навчального матеріалу на лекціях-презентаціях та інтерактивних лекціях;
– виконання практичних завдань, спрямованих на набуття слухачами вмінь і навичок на практиці застосовувати набуті теоретичні знання;
– самостійного вивчення слухачами навчального матеріалу на основі розробленого для теми комплексу навчально-методичних матеріалів;
– проведення підсумкового контрольного тестування.

ТЕМАТИЧНИЙ ПЛАН

ТЕМА 1. Виявлення творчо обдарованих дітей.

- Напрямки організації роботи з обдарованими учнями.
- Відбір навчального матеріалу для підготовки учнів до розв’язування олімпіадних задач.

ТЕМА 2. Ідеї та методи розв’язування нестандартних задач для учнів 7-8 класу.

- Загальні принципи розв’язування нестандартних задач.
- Задачі на подільність.
- Рівняння в цілих числах.

ТЕМА 3. Ідеї та методи розв’язування нестандартних задач для учнів 8-9 класів.

- Сумування: методи обчислення сум.
- Методи доведення нерівностей.

РОЗПОДІЛ НАВЧАЛЬНИХ ГОДИН

	Лекції, вивчення теорії, год.	**Практ. заняття, год.**	**Семінар. заняття, год.**	**Тести, год.**	**Всього, ауд. год.**	**Самост. робота, год.**
Вступ до курсу	0,5				0,5	

ТЕМА 1. Виявлення творчо обдарованих дітей.	0,5	0,5	0,5		1,5	2
ТЕМА 2. Ідеї та методи розв'язування нестандартних задач для учнів 7-8 класу.	0,5	1			1,5	2
ТЕМА 3. Ідеї та методи розв'язування нестандартних задач для учнів 8-9 класів.	0,5	1			1,5	2
Підсумковий контроль у формі тесту		1			1	
Всього, год.	**2**	**3,5**	**0,5**		**6**	**6**

Форми контролю

Навчальні результати слухачів творчої майстерні оцінюються на основі:

- Виконання практичних завдань;
- Участі у семінарських заняттях;
- Підсумкового контрольного тестування до модуля.

ГРАФІК НАВЧАЛЬНОГО ПРОЦЕСУ

Вид навчальної діяльності	Тема	Час проведення, год.	Макс. оцін.
Вступ до курсу			
Організаційна частина	Презентація модуля, знайомство, правила взаємодії	0,5	
ТЕМА 1. Виявлення творчо обдарованих дітей.			
Лекція	Напрямки організації роботи з обдарованими учнями.	0,5	
Практичне заняття	Відбір навчального матеріалу для підготовки учнів до розв'язування олімпіадних задач.	0,5	
Семінарське заняття	Презентація тематики навчальних занять курсу за вибором.	0,5	
ТЕМА 2. Ідеї та методи розв'язування нестандартних задач для учнів 7-8 класу.			

Лекція	Загальні принципи розв’язування нестандартних задач.	0,5	
Практичне заняття	Задачі на подільність. Рівняння в цілих числах.	1	
ТЕМА 3. Ідеї та методи розв’язування нестандартних задач для учнів 8-9 класів.			
Лекція	Сумування: методи обчислення сум. Методи доведення нерівностей.	0,5	
Практичне заняття	Сумування: методи обчислення сум. Методи доведення нерівностей.	1	
Підсумковий контроль			

ТЕМА 1. Виявлення творчо обдарованих дітей.

Мета теми:

- Спрямування професійного та творчого потенціалу вчителів математики на створення умов для виявлення та розвитку потенційної обдарованості учнів та напрямків організації роботи з обдарованими учнями.
- Розробити поради учителю щодо розвитку творчих здібностей обдарованих учнів.
- Відібрати теми навчального матеріалу для підготовки учнів до розв’язування олімпіадних задач.

Завдання теми:

Систематизувати знання щодо: виявлення обдарованих дітей та організаційних форм роботи з ними; вирішення проблемних ситуацій через глибоку систематизацію знань програмового матеріалу.

Сформувати вміння (навички): виявлення обдарованих дітей; відбору основних тем для планування позакласних занять з учнями.

Розвинути установки до:

- креативності та постійного творення власної педагогічної системи роботи з обдарованими учнями;
- самовдосконалення;
- забезпечення сприятливих соціальних, психологічних, педагогічних умов для актуалізації багатогранних творчих задатків учнів.

Сприяти набуттю досвіду щодо розвитку творчих здібностей та роботи з обдарованими учнями.

Очікувані навчальні результати:

Знання:

- ознак та типів обдарованих учнів;
- основних ідей та методів розв'язування нестандартних задач.

Уміння: знаходити правильний підхід до обдарованих учнів та роботи з ними; робити правильний відбір навчального матеріалу для підготовки учнів до розв'язування олімпіадних задач.

Установки до:

- креативності та постійного творення власної педагогічної системи роботи з обдарованими учнями;
- забезпечення сприятливих соціальних, психологічних, педагогічних умов для актуалізації багатогранних творчих задатків учнів.
- підтримки ініціативи та самостійності творчих задатків учнів.

Набуття досвіду:

- роботи з обдарованими учнями;
- планування та розробки навчальних занять по підготовці учнів до конкурсних змагань.

ХІД ЗАНЯТТЯ

Лекція. Програма «Обдаровані діти» на більш високому рівні сприяє розкриттю інтелектуального та творчого потенціалу обдарованої молоді, а також спрямована на стимулювання творчого самовдосконалення учнів, сприяння їхній самореалізації, соціалізації в сучасному суспільстві.

Метою Програми «Обдаровані діти» є:

- розвиток інтелектуальних, творчих здібностей дітей;
- створення сприятливих умов для самореалізації особистості учня;
- забезпечення якісного психолого-педагогічного супроводу, діагностики обдарованих учнів, визначення особливостей їх обдарованості;
- покращення якості підготовки учнів щодо стандартів базової загальної та середньої освіти;
- підвищення результативності олімпіад, конкурсів, науково-дослідницьких робіт учнів, членів МАН;
- створення умов для ранньої профілізації учнів;
- підвищення рівня компетентності та педагогічної майстерності вчителів школи.

Завдання Програми:

- розробка заходів з пошуку й цілеспрямованого відбору обдарованих дітей;
- створення системи психолого-педагогічної підтримки та супроводу обдарованих учнів;

- створення сприятливих умов для інтелектуального, духовного, морального, естетичного, фізичного розвитку учнів та надання їм можливості для самореалізації;
- розробка методичних рекомендацій і програм для ефективного навчання та розвитку обдарованих дітей, їх професійної орієнтації;
- оновлення змісту, форм і методів роботи з обдарованими дітьми;
- підготовка вчителів до роботи з обдарованою учнівською молоддю;
- створення системи стимулювання інтелектуально і творчо обдарованих учнів і вчителів, які з ними працюють;
- формування і розвиток соціально зрілої, творчої особистості, підготовленої до професійного самовизначення шляхом поглибленого вивчення профільних дисциплін за програмами, створеними викладачами ВНЗ

Ознаки обдарованого учня:

- часто перескакують через послідовні етапи свого розвитку;
- мають чудову пам'ять, беруть участь у всіх заходах, змаганнях, усних турнірах, олімпіадах тощо;
- мають великий словниковий запас, вони із задоволенням читають словники, енциклопедії;
- можуть займатися кількома справами відразу;
- дуже допитливі, активно досліджують навколишній світ;
- легко справляються з пізнавальною невизначеністю, із задоволенням сприймають складні довгострокові завдання;
- не можуть терпіти, коли їм нав'язують готову відповідь;
- можуть концентрувати свою увагу на одній справі;
- властиве надто розвинуте почуття справедливості;
- добре розвинуте почуття гумору;
- постійно намагаються вирішувати проблеми, які їм, поки що, „не під силу”, й у вирішенні деяких з них домагаються успіху.
- для них характерні перебільшені страхи, оскільки вони здатні уявити собі безліч небезпечних наслідків подій;
- часто володіють екстрасенсорними здібностями;
- негативно оцінюють себе;
- інколи мають труднощі з тонкою координацією.

Показники творчої обдарованості учнів.

Учень як особистість:

1. Стійка, підвищена потреба в самоактуалізації, вияві себе, самоствердженні.
2. Наявність особистої думки.

3. Інтелектуальна незалежність, зневажливе ставлення до стереотипів, авторитетів. Потреба чинити опір шаблону, нав'язаному стилю діяльності.
4. Висока самооцінка, потреба мати свій „Я - образ”.
5. Схильність до гри, почуття гумору, дотепність.
6. Оригінальність.
7. Імпульсивність, поривчастість.
8. Широта інтересів. Інтерес до філософських питань.
9. Повна відсутність поваги до прокладених шляхів.
10. Прагнення самостійно подолати труднощі, які виникли.
11. Постійне прагнення поліпшувати якість своєї продукції, вимогливість до себе.
12. Завзяття й наполегливість думки. Термін невідступно думати про певний предмет.
13. Потреба в серйозній внутрішній роботі, створенні своєї індивідуальності, духовному зростанню.

Типи обдарованих учнів

1. ***Найкращий учень***: усі його люблять, робить те, що йому кажуть і як; любить подобатися.
2. ***Бунтівник:*** сперечається, з ним важко спілкуватися, часто в нього виникає стан емоційно вольового напруження, коли щось загрожує досягненню його мети.
3. ***Підпільник:*** знає, що за обдарованість не платять, а навпаки вимагають, тому прагне не вистрибувати, а бути як усі.
4. ***Втікач:*** випадає з шкільної системи, не може підлаштуватися до вимог школи, вчителів.
5. ***Двобічний***: відстає або має вади фізичні; його розглядають як слабкого, не помічають обдарованості.
6. ***Цілеспрямований:*** незалежний, автономний, знає собі ціну, знає, чого хоче. Найкращий тип для розробки індивідуальної програми.

Поради викладачеві щодо розвитку творчих здібностей обдарованих учнів

1. Підхоплюйте думки учнів та оцінюйте їх тут же, підкреслюючи їхню оригінальність, важливість тощо.
2. Підсилюйте інтерес учнів до нового.
3. Заохочуйте оперувати предметами, матеріалами, ідеями. Учень практично вирішує дослідницькі ідеї.
4. Навчайте учнів систематично оцінювати кожну думку. Ніколи не відкидайте її.
5. Виробляйте в учнів терпиме ставлення до нових понять, думок.
6. Не вимагайте запам'ятовувати схеми, таблиці, формули, одностороннє рішення, де є багатоваріантні способи.
7. Культивуйте творчу атмосферу – учні повинні знати, що творчі пропозиції, думки група зустрічає з визнанням, приймає їх, використовує.

8. Навчайте учнів цінувати свої та чужі думки, цінно фіксувати їх у блокноті.
9. Іноді однолітки ставляться до здібних учнів агресивно. Необхідно не усунути проблему, а запобігти їй. Найкраще здібному учневі пояснити, що це характерно, і розвивати в ньому терпимість і впевненість.
10. Пропонуйте цікаві факти, випадки, ідеї.
11. Розсіюйте страх.
12. Стимулюйте і підтримуйте ініціативу, самостійність. Підкидайте проекти, які можуть захопити.
13. Створюйте проблемні ситуації, що потребують альтернатив, прогнозування, уяви.
14. Створюйте у навчальному закладі періоди творчої активності, багато геніальних рішень приходить в ті моменти.
15. Розвивайте критичне ставлення.
16. Навчайте доводити почате до логічного завершення.
17. Впливайте особистим прикладом.

Практичне заняття. Відбір навчального матеріалу для підготовки учнів до розв'язування олімпіадних задач (робота у малих групах).

Семінарське заняття. Презентація тематики навчальних занять курсу за вибором.

ТЕМА 2. Ідеї та методи розв'язування нестандартних задач для учнів 7-8 класу.

Мета теми: теоретичне вивчення проблеми; розробка методів розв'язування задач на подільність та діофантових рівнянь.

Завдання теми:

Систематизувати знання щодо: розв'язування олімпіадних задач на подільність та методів знаходження розв'язків діофантових рівнянь через глибоку систематизацію знань програмового матеріалу.

Сформувати вміння (навички): використовувати основні методи розв'язування задач на подільність та діофантових рівнянь в нестандартних ситуаціях.

Розвинути установки до:

- постійного знаходження нових способів розв'язування задач на подільність та діофантових рівнянь;
- самовдосконалення.

Сприяти набуттю досвіду щодо розв'язування нестандартних задач на подільність та діофантових рівнянь.

Очікувані навчальні результати:

Знання: основних методів при розв'язуванні задач на подільність та діофантових рівнянь.

Уміння: примінити основні методи розв'язування задач на подільність та діофантових рівнянь в задачах олімпіадного напрямку.

Установки до: креативності та постійного творення власної методики розв'язування олімпіадних задач на подільність та діофантових рівнянь.

Набуття досвіду: створення власної методики для розв'язування задач на подільність та діофантових рівнянь.

Основи теорії подільності. Лекційно – практичний матеріал

В процесі проведення позакласної роботи з математики учнів необхідно ознайомити з основними методами розв'язування олімпіадних задач. Велике місце серед олімпіадних задач займають задачі на подільність. Практично в кожній олімпіаді є задачі цього типу. Тому кожен вчитель математики повинен бути ознайомлений з цією темою і вміти викладати її учням.

Взагалі, в олімпіадних задачах, задачі, пов'язані з цілими числами, займають чи не найпершу позицію. Задачі на цілі числа надзвичайно різноманітні. Розглянемо основні типи задач на подільність та методи їх розв'язування.

Теоретичний і практичний матеріал необхідний для розв'язування завдань на подільність

Означення. *Натуральне число p називається **простим**, якщо в нього тільки два натуральних дільники – 1 і саме число p. Прості числа - 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 23, 29, 31, 37, 41, 43, … Загальний вираз простих чисел, більших за 3, є $3n \pm 1$, де $n \in N$.*

Ознаки подільності

1. *Якщо остання цифра числа ділиться на 2 (парна), то число ділиться на 2.*
2. *Якщо остання цифра числа 0 або 5, то число ділиться на 5.*
3. *Якщо число закінчується на к нулів, то воно ділиться на $10^к$.*
4. *Якщо число, виражене двома останніми цифрами даного числа а, ділиться на 4 то і число а ділиться на 4.*
5. *Якщо число, виражене трьома останніми цифрами даного числа а, ділиться на 8 то і число а ділиться на 8.*
6. *Якщо сума цифр числа а ділиться на 3, то число а ділиться на 3.*
7. *Якщо сума цифр числа а ділиться на 9, то число а ділиться на 9.*
8. *Якщо різниця між сумою цифр, що стоять на непарних місцях числа а (рахуючи справа наліво), і сумою цифр, що стоять на парних місцях, ділиться на 11, то число а ділиться на 11.*
9. *Якщо число, виражене двома останніми цифрами даного числа а, ділиться на 25 то і число а ділиться на 25.*

10. *Якщо число, виражене трьома останніми цифрами даного числа а, ділиться на 125 то і число а ділиться на 125.*
11. *Щоб дізнатися, чи ділиться число а на 7, 11, 13 треба розбити його справа наліво на трицифрові грані, знайти суму Р граней, що стоять на парних місцях, і суму А граней, що стоять на непарних місцях, і якщо (Р-А) ділиться на 7, 11, 13, то і число а ділиться на 7, 11 13.*

Властивості подільності цілих чисел

1.Якщо $a \vdots в$ *і к – будь яке число, то* $ка \vdots в$.
2.Якщо $a \vdots в$ *і* $в \vdots с$, *то* $a \vdots с$.
3.Якщо $a \vdots к$ *і* $в \vdots р$, *то* $ав \vdots кр$.
4.Якщо $a \vdots к$ *і* $в \vdots к$, *то* $(а \pm в) \vdots к$.
5.Якщо $a \vdots к$, $в \vdots к$ *і с та р – будь-які числа, то* $(ас \pm вр) \vdots к$.
6.Якщо $a \vdots к$ *і* $a \vdots р$, *причому* ***к і р – взаємно прості****, то* $a \vdots кр$.

Властивості простих дільників натуральних чисел

1. *Будь-яке натуральне число (більше за одиницю) або ділиться на дане просте число р, або є взаємно простим з ним.*
2. *Якщо добуток кількох співмножників ділиться на просте число р, то принаймні один із співмножників ділиться на р.*
3. *Найменший простий дільник складеного числа а не перевищує* $\sqrt{a}$.

Приклад 1. Найменший простий дільник числа 143 дорівнює 11, причому $11 < \sqrt{143} \approx 11{,}96$.

Наслідок. *Якщо задане число* q *не ділиться на жодне з простих чисел 2, 3, 5,...,* p, *де* $p \le \sqrt{q}$, *то це число* q *- просте.*

Приклад. Нехай $q = 113$, тоді $\sqrt{113} \approx 10$. Усі прості числа $p \le \sqrt{113}$ - це 2, 3, 5, 7. Оскільки 113 не ділиться на жодне з цих простих чисел, то воно саме є простим.

Потрібно запам'ятати

1. *З* k *послідовних чисел* $m+1,\ m+2, \ldots, m+k$ *одне і тільки одне ділиться на* k.
2. *Добуток* $(n+1)(n+2)\cdot\ldots\cdot(n+k) \vdots k!$.
3. *Загальний вираз простих чисел, більших за 3, є* $3n \pm 1$.
4. *Остача при діленні квадрата натурального числа на 3 дорівнює 0 або 1.*
5. *Остача при діленні квадрата натурального числа на 4 дорівнює 0 або 1.*
6. *Остача при діленні квадрата непарного натурального числа на 8 дорівнює 1.*
7. *Остача при діленні куба натурального числа на 9 дорівнює 0, 1 та 8.*
8. *Остача при діленні* n^4 *на 5, де* $n \in Z$ *дорівнює 0 або 1.*
9. *Якщо квадрат цілого числа ділиться на* p, *то ділиться і на* p^2.

10.Якщо, n - просте і $n>3$, то $(n^2-1)\vdots 24$.

Приклад 2. Доведіть, що значення виразу $10^{2013}+8$ ділиться націло на 9.

Розв'язання. Запис значення виразу 10^{2013} складається з цифри 1 і дві тисячі тринадцяти цифр 0, а запис значення виразу $10^{2013}+8$ - з цифри 1, цифри 8 і дві тисячі дванадцяти цифр 0. За ознакою подільності на 9, початкове число націло ділиться на 9.

Приклад 3. Довести, що $2^{2011}+3^{2011}$ ділиться на 5.

Розв'язання. ***1 спосіб.*** Використаємо наслідок з теореми Безу, що $в^{2n-1}+a^{2n-1}$ ділиться без остачі на в+а. Отже, вираз $2^{2011}+3^{2011}$ ділиться без остачі на 2+3=5.

2 спосіб.

Використаємо формулу $a^n+b^n=(a+в)(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-...-ab^{n-2}+b^{n-1})$, де n – непарне натуральне число. Маємо: $2^{2011}+3^{2011}=(2+3)(2^{2010}-2^{2009}\cdot 3+2^{2008}\cdot 3^2-...-2\cdot 3^{2009}+3^{2010})=5A$, де A – числове значення другого множника. Отже, вираз $2^{2011}+3^{2011}$ ділиться без остачі на 5.

3 спосіб. Легко дослідити, що останні цифри виразу 2^n повторюються і будуть 2, 4, 8, 6, отже $2^{2011}=2^{4n+1}$ закінчується цифрою 2. Останні цифри виразу 3^n повторюються і будуть 3, 9, 7, 1, отже $3^{2011}=3^{4n+1}$ закінчується цифрою 3. Отже, вираз $2^{2011}+3^{2011}$ закінчується цифрою 2+3=5. За ознакою подільності на 5, початковий вираз націло ділиться на 5.

Приклад 4. Відомо, що $(6a+17в)(7a+16в)\vdots 11$ при деяких цілих а і в. Довести, що даний добуток націло ділиться на 121.

Розв'язання. Так як даний добуток ділиться на просте число 11, то один із множників націло ділиться на 11. Розглянемо суму двох виразів $(6a+17в)+(7a+16в)=33a+33в=33(a+в)$, яка націло ділиться на 11. Якщо сума ділиться на 11 і один з доданків ділиться на 11, то і другий доданок ділиться на 11. Отже, вираз $(6a+17в)(7a+16в)\vdots 121$.

Приклад 5. Відомо, що $(3x+7y)\vdots 19$ при умові, що $x,y\in Z$. Довести, що $(43x+75y)\vdots 19$.

Розв'язання. Виконаємо перетворення $43x+75y=8(3x+7y)+19x+19y$. Вираз $8(3x+7y)\vdots 19$ з умови, $19x$ і $19y$ кратне 19, отже і $(43x+75y)\vdots 19$.

Приклад 6. Довести, що вираз $3^1+3^2+3^3+...+3^{100}$ ділиться націло на 120.

Розв'язання. $3^1+3^2+3^3+...+3^{100}=(3^1+3^2)+(3^3+3^4)+...+(3^{97}+3^{98})+(3^{99}+3^{100})=$

$$=3(1+3)+3^3(1+3)+...+3^{97}(1+3)+3^{99}(1+3)=4(3+3^3+3^5+...+3^{97}+3^{99})=$$

$$= 4\left(3\left(1+3^2\right)+3^5\left(1+3^2\right)+\ldots+3^{93}\left(1+3^2\right)+3^{97}(1+3^2)\right)=$$

$$= 4\cdot 10\cdot\left(3+3^5+\ldots+3^{93}+3^{97}\right)=120\cdot\left(1+3^4+\ldots+3^{92}+3^{96}\right).$$

Отже, початковий вираз націло ділиться на 120.

Приклад 7. Знайдіть усі такі p, щоб числа p, $p+10$ та $p+14$ були простими.

Розв'язання. Щоб числа були простими, то p не ділиться на 3. Якщо $p=3n+1$, то $p+14$ ділиться на 3, якщо $p=3n+2$, то $p+10$ ділиться на 3. Тому єдине значення, що задовольняє умову задачі – це $p=3$.

Приклад 8. Чи існують чотири послідовних натуральних числа, кожне з яких можна подати у вигляді суми двох квадратів.

Розв'язання. Розглянемо остачі при діленні на 4. Квадрат натурального числа може давати остачу 0 або 1. Сума квадратів – 0, 1, 2. Серед чотирьох послідовних натуральних чисел знайдеться таке, що має остачу 3. Воно у суму двох квадратів не розкладається. Значить таких чисел не існує.

Приклад 9. Шестидесятизначне число записане за допомогою 30 нулів і 30 одиниць. Чи можна це число представити у вигляді квадрата натурального числа.

Розв'язання. За ознаками подільності дане число ділиться на 3, але не ділиться на $9=3^2$. Ми знаємо, що якщо квадрат цілого числа ділиться на p, то ділиться і на p^2. Тому наше число не можна представити у вигляді квадрата натурального числа.

Приклад 10. p - просте число більше 3. Відомо, що при деякому n p^n має 20 цифр. Довести, що серед них є хоча б три однакових.

Розв'язання. Припустимо, що серед 20 цифр числа p^n не має однакових, тоді p^n складається із цифр 0,0,1,1,2,2,…,9,9. Сума цих цифр дорівнює 90, а значить p^n кратне 3 – просте число, тому і p кратне 3. Отримали протиріччя, бо за умовою задачі p - просте число і більше 3.

Перестановки цифр у числах

Приклад 11. У тризначному числі закреслили останню цифру нуль, і воно зменшилось на 405. Яке число отримали?

Розв'язання. Нехай $\overline{ав0}$ дане тризначне число, тоді $\overline{ав}$ двозначне число, що утворилось при закресленні нуля. За умовою задачі отримуємо рівняння:

$$\overline{ав0}=\overline{ав}+405,$$

$$100а+10в=10а+в+405,$$

$$90а+9в=405,$$

$$9\left(10а+в\right)=405,$$

$$9\cdot\overline{ав}=405,$$

$$\overline{ав}=45.$$

Відповідь:45.

Приклад 12. Цифра десятків двозначного числа втричі більше за цифру одиниць. Якщо ці цифри поміняти місцями, то отримане число буде меншим від даного на 54. Знайдіть дане число?

Розв'язання. Нехай $\overline{ав}$ дане двозначне число. За умовою а=3в.

Складаємо рівняння $\overline{ав} = \overline{ва} + 54,$

$$10а + в = 10в + а + 54,$$

$$9а - 9в = 54,$$

Підставимо в останню рівність, що $а = 3в,$ маємо:

$$27в - 9в = 54,$$

$$18в = 54,$$

$$в = 3,$$

тоді а=9 і шукане число 93.

Відповідь: 93.

Приклад 13. У шестицифровому числі перша цифра збігається з четвертою, друга - з п'ятою, третя – з шостою. Доведіть, що це число ділиться на 7, 11, 13.

Розв'язання. Нехай $\overline{авсавс}$ - шукане шестицифрове число. Виконаємо перетворення

$$\overline{авсавс} = 100000\,а + 10000\,в + 1000\,с + 100\,а + 10в + с =$$

$$= 100100\,а + 10010\,в + 1001с = 1001\,(100а + 10в + с) = 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot \overline{авс}.$$

Отже, шестицифрове число ділиться на 7, 11, 13.

Приклад 14. Чи може різниця двох трьохзначних чисел, із яких друге записане тими ж цифрами, що й перше, але в оберненому порядку бути квадратом натурального числа.

Розв'язання. За умовою задачі $\overline{авс} - \overline{сва} = x^2$, де $a, c, x \in N$, $b \in Z$ і $0 < a \le 9$, $0 \le b \le 9$, $0 < c \le 9$.

Маємо $100a + 10b + c - 100c - 10b - a = x^2$, $99a - 99c = x^2$, $9 \cdot 11 \cdot (a - c) = x^2$, значить $x^2 \vdots 11$, але x^2 не кратне 121, бо $a - c < a < 11$. Отже, різниця двох трьохзначних чисел, із яких друге записане тими ж цифрами, що й перше, але в оберненому порядку не може бути квадратом натурального числа.

Приклад 15. Скільки послідовних натуральних чисел, починаючи з 1 потрібно додати, щоб отримати трьохзначне число, записане однаковими цифрами.

Розв'язання. За умовою задачі складаємо рівність $1 + 2 + 3 + ... + n = \overline{aaa}$, де $0 < a \le 9$. Тоді $\frac{n(n+1)}{2} = 111a$, $n(n+1) = 2 \cdot 3 \cdot 37 \cdot a$. Так як 3 і 37 прості числа, то n

або $n+1$ кратне 3 або 37. Якщо n кратне 37, то $n+1=38$, а тоді $n(n+1)$ не кратне 3, тому такий варіант не підходить. Якщо $n+1$ кратне 37, $n=36$. Маємо $36\cdot 37=2\cdot 3\cdot 37\cdot a$, $a=6$. Отже послідовних чисел потрібно взяти 36.

Приклад 16. Знайдіть двоцифрове число, квадрат якого записаний цифрами 0, 2, 3, 5.

Розв'язання. Нехай х шукане двозначне число. Квадрат числа х не може закінчуватися на 2 або 3, тому остання цифра 0 або 5. Значить $x^2 \vdots 5$, тоді і $x^2 \vdots 25$. За ознакою подільності на 25 дві останні цифри числа x^2 будуть 25 або 50. Але 50 не може бути, бо тоді $x^2 \vdots 10$, а значить і $x^2 \vdots 100$ і тоді останні дві цифри числа x^2 будуть 00, а це суперечить умові задачі. Отже, цифри числа x^2 можуть бути записані тільки як 3025, шукане число тоді 55.

Приклад 17. Знайдіть трицифрові числа сума яких з числом записаним тими ж цифрами, але в оберненому порядку кратна 68.

Розв'язання. Припустимо, що $\overline{авс}$ - шукане число.

Розглянемо $\overline{авс}+\overline{сва}=100a+10в+c+100c+10в+a=101(a+c)+20в$, вираз $101(a+c)+20в$ кратний $68=17\cdot 4$. Так, як $20в \vdots 4$, а 101 не кратне 4, то $(a+c)\vdots 4$. Виділимо вираз, який ділиться на 17. $101(a+c)+20в=102(a+c)+17в+3в-a-c\equiv 3в-a-c(\mathrm{mod}\,17)$, тобто $(3в-c-a)\vdots 17$. Так, як а, в, с - цифри, то $0\le 3в\le 27$, $0<a\le 9$, $0<c\le 9$, а значить $-18\le 3в-a-c\le 27$, $0<a+c\le 18$. Переберемо всі можливі значення.

1) Якщо $3в-a-c=3в-(a+c)=17$, то можливі наступні випадки:

а) $a+c=4$, тоді $3в-4=17$, $3в=21$, $в=7$. Отже, одержуємо такі числа 272, 371, 173.

б) $a+c=8$, тоді $3в-8=17$, $3в=25$. Отже, рівняння в цілих числах не має розв'язків.

в) $a+c=12$, тоді $3в-12=17$, $3в=29$. Отже, рівняння в цілих числах не має розв'язків.

г) $a+c=16$, тоді $3в-16=17$, $3в=33$, в=11, але $0\le в\le 9$. Отже, такий варіант не дає шуканого результату.

2) Якщо $3в-a-c=3в-(a+c)=0$, то можливі наступні випадки:

а) $a+c=4$, тоді $3в-4=0$, $3в=4$. Отже, рівняння в цілих числах не має розв'язків.

б) $a+c=8$, тоді $3в-8=0$, $3в=8$. Отже, рівняння в цілих числах не має розв'язків.

в) $a+c=12$, тоді $3в-12=0$, $в=4$. Отже, одержуємо такі числа 349, 943, 448, 844, 547, 745, 646.

г) $a+c=16$, тоді $3в-16=0$, $3в=16$. Отже, рівняння в цілих числах не має розв'язків.

3) Якщо $3в-a-c=3в-(a+c)=-17$, то можливі наступні випадки:

а) $a+c=4$, тоді $3в-4=-17$, $3в=-13$. Отже, рівняння в цілих числах не має розв'язків.

б) $a+c=8$, тоді $3в-8=-17$, $3в=-9$, в=-3, але $0\le в\le 9$. Отже, такий варіант не дає шуканого результату.

в) $a+c=12$, тоді $3в-12=-17$, $3в=-5$. Отже, рівняння в цілих числах не має розв'язків.

г) $a+c=16$, тоді $3в-16=-17$, $3в=-1$. Отже, рівняння в цілих числах не має розв'язків.

Відповідь: 272, 371, 173, 349, 943, 448, 844, 547, 745, 646.

Ділення з остачею. Метод остач

До цього типу задач будемо відносити ті, в яких ділене є многочленом від цілої або натуральної змінної. При застосуванні методу остач поліном краще розкласти на множники.

Теорема. *Для будь-якого цілого числа а і натурального числа* n *існує єдина пара цілих чисел* q *і* r *таких, що* $a=nq+r$*, де* $0\le r\le n$*. Таким чином, остача може набирати значень 0, 1, 2,…,* $n-1$*, всього* n *випадків. Метод остач полягає у розгляданні кожного випадку окремо. При цьому для цілих змінних будуть відповідно представлення* $x=nk$*,* $x=nk+1,\ldots,$ $x=nk+(n-1)$*. Розглядання окремо цих випадків часто дає можливість просто розв'язати задачу.*

Теорема. *Якщо а при діленні на* n *має остачу* r_1*, а в – остачу* r_2*, то число а+в при діленні на* n *дає таку саму остачу, як і число* r_1+r_2*, число а-в при діленні на* n *дає таку саму остачу, як і число* r_1-r_2*, ав – таку саму, як* r_1r_2*.*

Наслідок. *Якщо а при діленні на* n *дає остачу* r*, то* a^m*,* $m\in N$ *дає при діленні на* n *таку саму остачу, як і число* r^m*.*

Приклад 18. Запишіть загальну формулу числа, яке при діленні на 6 і 8 дає в остачі 5.

Розв'язання. Нехай є число n. З умови задачі $n=6m+5$, $n=8p+5$, тоді $n-5=6m$ і $n-5=8p$ - означає, що вираз $n-5$ ділиться націло на 6 і 8, а значить на 24. Отже, $n=24c+5$, де $c\in N$.

Приклад 19. В шафі стоять книги. Якщо їх взяти по 4, по 5 або по 6, то кожного разу залишиться одна книга, а якщо взяти по 7 книг, то зайвих книг не залишиться. Яка кількість книг в шафі, якщо їх не більше 400.

Розв'язання. Нехай в шафі стоїть х книг. З умови задачі робимо висновок, що $x-1$ кратне 4, 5, 6, а x кратне 7 при умові, що $0<x\le 400$. Тоді $x-1=60n$, $n\in Z$ і $x=60n+1$ кратне 7, де $0<x\le 400$. Перебираючи значення $n=0,1,2,3,4,5,6$, знаходимо, що $n=5$. Шукане число книг 301.

Приклад 20. Знайдіть найменше натуральне число, яке при діленні на 2 дає остачу 1, при діленні на 3 – 2, на 4 – 3, на 5 – 4, на 6 – 5, на 7 – 6, на 8 – 7, на 9 – 8, на 10 – 9.

Розв'язання. Нехай х шукане число. З умови задачі:

1) $x=2n_1+1$, $x+1=2n_1+2$, отже $(x+1)\vdots 2$; 2) $x=3n_2+2$, $x+1=3n_2+3$, отже $(x+1)\vdots 3$;

3) $x=4n_3+3$, $x+1=4n_3+4$, отже $(x+1)\vdots 4$; 4) $x=5n_4+4$, $x+1=5n_4+5$, отже $(x+1)\vdots 5$;

5) $x=6n_5+5$, $x+1=6n_5+6$, отже $(x+1)\vdots 6$; 6) $x=7n_6+6$, $x+1=7n_6+7$, отже $(x+1)\vdots 7$;

7) $x=8n_7+7$, $x+1=8n_7+8$, отже $(x+1)\vdots 8$; 8) $x=9n_8+8$, $x+1=9n_8+9$, отже $(x+1)\vdots 9$;

9) $x=10n_9+9$, $x+1=10n_9+10$, отже $(x+1)\vdots 10$. Таким чином, $x+1$ кратне числам 2,3,4,5,6,7,8,9,10, отже $x+1=2^3\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7=2520$, а $x=2519$.

Приклад 21. Доведіть, що при діленні простого числа на 30 в остачі отримаємо просте число або 1.

Розв'язання. Нехай х – просте число, де $x=30n+r$ і $0\le r<30$. Всі складені числа до 30 мають в якості найменшого натурального дільника одне з чисел 2; 3; 5. Тому якщо, r складене, то х ділиться на одне з чисел 2; 3; 5, будучи більше, чим це число. Отримали протиріччя, що х – просте число.

Приклад 22. Доведіть, що при будь-якому натуральному значенні *n* вираз $(n^3+2n)\vdots 3$.

Розв'язання. ***1 спосіб.*** Використаємо метод остач. Винесемо спільний множник за дужки $n^3+2n=n(n^2+2)$. Розглянемо три випадки:

1) Нехай число *n* кратне 3, тоді зрозуміло, що вираз $n(n^2+2)\vdots 3$.

2) Нехай число *n* при діленні на 3 дає в остачі 1, тобто $n=3m+1$, де $m\in N$. Тоді маємо:

$$n^3+2n=n(n^2+2)=(3m+1)((3m+1)^2+2)=$$
$$=(3m+1)(9m^2+6m+3)=3(3m+1)(3m^2+2m+1),$$

останній вираз націло ділиться на 3.
3) Нехай число *n* при діленні на 3 дає в остачі 2, тобто $n = 3m + 2$, де $m \in N$. Тоді маємо:

$$n^3 + 2n = n(n^2 + 2) = (3m + 2)((3m + 2)^2 + 2) =$$
$$= (3m + 2)(9m^2 + 12m + 6) = 3(3m + 2)(3m^2 + 4m + 2),$$

останній вираз націло ділиться на 3.
Розглянувши всі випадки робимо висновок, що вираз $(n^3 + 2n) \vdots 3$.

2 спосіб. Виконаємо деякі перетворення $n^3 + 2n = n^3 - n + 3n = n(n^2 - 1) + 3n = n(n-1)(n+1) + 3n$. Вираз $n(n-1)(n+1)$ - це добуток трьох послідовних натуральних чисел, одне з яких кратне 3, а вираз *3n* – кратний 3, тоді і їхня сума націло ділиться на 3. Отже, вираз $(n^3 + 2n) \vdots 3$.

Приклад 23. Довести, що для $n \in Z$ вираз $n^3 - 3n^2 + 2n$ ділиться націло на 6.
Розв'язання. ***1 спосіб.*** Розкладемо вираз на множники:

$$n^3 - 3n^2 + 2n = n(n^2 - 3n + 2) = n(n^2 - 2n - n + 2) =$$
$$= n(n(n-2) - (n-2)) = (n-2)(n-1)n.$$

Ми отримали добуток трьох послідовних натуральних чисел, який кратний 6.
2 спосіб. Застосуємо метод остач. Так, як $6 = 2 \cdot 3$ і $НСД(2;3) = 1$, то окремо будемо доводити подільність на 2 і 3. Позначимо $B = n^3 - 3n^2 + 2n = n(n^2 - 3n + 2) = (n-2)(n-1)n$.
1) Для того, щоб вираз ділився на 2 розглядаємо два випадки.

а) Якщо $n = 2m$, де $m \in Z$, то $B = (2m-2)(2m-1)2m$ і він кратний 2, бо один із множників 2.

б) Якщо $n = 2m+1$, де $m \in Z$, то $B = (2m+1-2)(2m+1-1)(2m+1) = (2m-1)2m(2m+1)$ і він кратний 2, бо один із множників 2.

2) Для того, щоб вираз ділився на 3 розглядаємо три випадки.

а) Якщо $n = 3m$, де $m \in Z$, то $B = (3m-2)(3m-1)3m$ і він кратний 3, бо один із множників 3.

б) Якщо $n = 3m+1$, де $m \in Z$, то $B = (3m+1-2)(3m+1-1)(3m+1) = (3m-1)3m(3m+1)$ і він кратний 3, бо один із множників 3.

в) Якщо $n = 3m+2$, де $m \in Z$, то $B = (3m+2-2)(3m+2-1)(3m+2) = 3m(3m+1)(3m+2)$ і він кратний 3, бо один із множників 3.
Так, як вираз $n^3 - 3n^2 + 2n$ ділиться націло на 2 і 3, то він ділиться і на 6.
3 спосіб. Застосуємо властивості конгруенції.

1) Доведемо, що вираз $B = n^3 - 3n^2 + 2n$ ділиться на 2, для цього розглянемо два випадки.

а) Якщо $n \equiv 0(\bmod 2)$, то $B \equiv 0^3 - 3\cdot 0^2 + 2\cdot 0 \equiv 0(\bmod 2)$, тобто $B\vdots 2$.

б) Якщо $n \equiv 1(\bmod 2)$, то $B \equiv 1^3 - 3\cdot 1^2 + 2\cdot 1 \equiv 0(\bmod 2)$, тобто $B\vdots 2$.

1) Доведемо, що вираз $B = n^3 - 3n^2 + 2n$ ділиться на 3, для цього розглянемо три випадки.

а) Якщо $n \equiv 0(\bmod 3)$, то $B \equiv 0^3 - 3\cdot 0^2 + 2\cdot 0 \equiv 0(\bmod 3)$, тобто $B\vdots 3$.

б) Якщо $n \equiv 1(\bmod 3)$, то $B \equiv 1^3 - 3\cdot 1^2 + 2\cdot 1 \equiv 0(\bmod 3)$, тобто $B\vdots 3$.

в) Якщо $n \equiv 2(\bmod 3)$, то $B \equiv 2^3 - 3\cdot 2^2 + 2\cdot 2 \equiv 0(\bmod 3)$, тобто $B\vdots 3$.

Так, як вираз $n^3 - 3n^2 + 2n$ ділиться націло на 2 і 3, то він ділиться і на 6.

Приклад 24. ***(базова задача).*** Якщо p - просте число і $p > 3$, то $(p^2 - 1)\vdots 24$.

Розв'язання. ***1 спосіб.*** Число $24 = 3\cdot 8$, $НСД(3;8) = 1$. Вираз $p^2 - 1 = (p-1)(p+1)$. Якщо p - просте число і $p > 3$, то його можна представити у вигляді $p = 3n \pm 1$, $n \in N$, тоді один із множників $p-1$ або $p+1$ буде націло ділитися на 3. Так, як p - просте число і $p > 3$, то воно непарне, а значить $p-1$ і $p+1$ два послідовні парні числа, одне з яких ділиться на 2 інше на 4, тому $p^2 - 1 = (p-1)(p+1)$ ділиться націло на 8. Отже, $(p^2 - 1)\vdots 24$.

2 спосіб. Розглянемо чотири послідовних числа $p-1$, p , $p+1$, $p+2$. Серед них два парні, хоча б одне кратне 3 і 4. Так, як p - просте число і $p > 3$, а $p+2$ - непарне, то $p-1$ і $p+1$ два послідовних парних числа одне з яких ділиться на 2 інше на 4, а значить $(p^2 - 1)\vdots 8$. Зрозуміло, що одне з чисел $p-1$ або $p+1$ кратне 3. Отже, $(p^2 - 1)\vdots 24$.

Приклад 25. Якщо p і q - різні прості числа, які більші 3, то $(p^2 - q^2)\vdots 24$.

Розв'язання. Вираз $p^2 - q^2 = (p^2 - 1) - (q^2 - 1)$, а далі розв'язується, як попередня задача.

Приклад 26. Доведіть, що серед будь-яких 2012 натуральних чисел можна вибрати два, різниця яких ділиться на 2011.

Розв'язання. При діленні н 2011 можливі 2011 різних остач – 0, 1, 2,…, 2010. А ми маємо 2012 чисел серед яких хоча б у двох остачі будуть рівними, тому їх різниця ділиться на 2011.

Приклад 27. Було 5 аркушів паперу. Деякі з них розрізали на 5 кусків кожен. Таку операцію розрізування повторили кілька разів. Чи можна в результаті таких операцій отримати 2011 кусків?

Розв'язання. Розрізання одного аркуша паперу на 5 частин збільшує кількість кусків на 4. Нехай розрізань було n, тоді після n розрізань буде $4n+5$, де $n \in N$. Припустимо, що $4n+5=2011$, тоді $4n=2006$. Так, як 2006 не ділиться націло на 4, то 2011 кусків отримати не можна.

Алгоритм Евкліда

Для знаходження НСД пари натуральних чисел (а;в) робимо так:

1. *ділимо а на в і отримуємо остачу* r*;*
2. *ділимо в на* r *і отримуємо остачу* r_1*;*
3. *ділимо* r *на* r_1 *і отримуємо остачу* r_2 *і так робимо до тих пір, поки деяке число* r_n *не поділиться на* r_{n+1}*. Число* r_{n+1} *- називають НСД(а;в).*

Тобто: $НСД(a;в)=НСД(в;r)=НСД(r;r_1)=...=НСД(r_n;r_{n+1})=r_{n+1}$.

Теорема. *Якщо* $a>b$*, то* $НСД(a;в)=НСД(a-в;в)$.

Зв'язок між НСД і НСК двох чисел а і в

$НСД(a;в)\cdot НСК(a;в)=ав$ *- добуток НСД і НСК двох натуральних чисел дорівнює добутку цих чисел.*

З даної рівності можна знайти НСК двох чисел а і в.

Приклад 28. Скоротіть дріб $\dfrac{2147}{1577}$.

Розв'язання. Знайдемо НСД чисел 2147 і 1577 застосувавши алгоритм Евкліда.

$$2147=1577\cdot 1+570, \qquad 1577=570\cdot 2+437,$$
$$570=437\cdot 1+133,$$
$$437=133\cdot 3+38, \qquad 133=38\cdot 3+19,$$
$$38=19\cdot 2.$$

Отже, $НСД(2147;1577)=19$, тому $\dfrac{2147}{1577}=\dfrac{19\cdot 113}{19\cdot 87}=\dfrac{113}{87}$.

Приклад 29. Доведіть, що при будь-якому натуральному значенні *n* дріб $\dfrac{12n+1}{30n+2}$ буде нескоротним.

Розв'язання. Застосуємо відому теорему, якщо $a>b$, то $НСД(a;в)=НСД(a-в;в)$. Маємо:

$$НСД(30n+2;12n+1)=НСД(18n+1;12n+1)=НСД(12n+1;6n)=$$
$$=НСД(6n+1;6n)=НСД(6n;1)=1,$$

а значить дріб нескоротний, бо найбільший спільний дільник чисельника і знаменника дорівнює 1, тобто числа $12n+1$ і $30n+2$ взаємно прості. *Дане завдання можна зробити за допомогою алгоритму Евкліда.*

Теорема. *Найбільший спільний дільник чисел a і $в$ можна виразити через числа а і в у вигляді $ax+by$, де $x;y \in Z$.*

Приклад 30. Запишемо НСД чисел $a=2147$ і $в=1577$ у вигляді $ax+by$, *де* $x;y \in Z$.

Розв'язання. Використавши алгоритм Евкліда отримаємо рівності:

1) $2147=1577\cdot 1+570$, тоді $570=2147-1577\cdot 1$;

2) $1577=570\cdot 2+437$, тоді $437=1577-570\cdot 2$;

3) $570=437\cdot 1+133$, тоді $133=570-437\cdot 1$;

4) $437=133\cdot 3+38$, тоді $38=437-133\cdot 3$;

5) $133=38\cdot 3+19$, тоді $19=133-38\cdot 3$.

6) $38=19\cdot 2$.

Отже, $НСД(2147;1577)=19=133-3\cdot 38=133-3\cdot(437-133\cdot 3)=133-3\cdot 437+9\cdot 133=$
$=10\cdot 133-3\cdot 437=10\cdot(570-1\cdot 437)-3\cdot 437=$

$$=10\cdot 570-10\cdot 437-3\cdot 437=10\cdot 570-13\cdot 437=10\cdot 570-13\cdot(1577-2\cdot 570)=$$

$$=10\cdot 570-13\cdot 1577+26\cdot 570=36\cdot 570-13\cdot 1577=36\cdot(2147-1\cdot 1577)-13\cdot 1577=$$

$$=36\cdot 2147-36\cdot 1577-13\cdot 1577=36\cdot 2147-49\cdot 1577.$$

1. Таким чином, $НСД(a;в)=НСД(2147;1577)=19=ax+by=2147\cdot 36-1577\cdot 49$, де $x=36$, а $y=-49$.

Основна теорема теорії подільності

*Будь-яке натуральне число, більше за одиницю, можна розкласти в добуток простих чисел, причому цей розклад єдиний з точністю до порядку співмножників $a=p_1\cdot p_2\cdot p_3\ldots\cdot p_n$, де $p_1,p_2,p_3,..,p_n$ - прості числа. Запис $a=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot p_3^{\alpha_3}\cdot\ldots\cdot p_n^{\alpha_n}$ - **канонічний розклад числа а**, де $p_1,p_2,p_3,..,p_n$ - прості числа, а $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,..,\alpha_n$ - натуральні числа.*

Обчислення кількості усіх дільників числа а

Якщо $a=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot p_3^{\alpha_3}\cdot\ldots\cdot p_n^{\alpha_n}$ - канонічний розклад числа а, де $p_1,p_2,p_3,..,p_n$ - прості числа, а $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,..,\alpha_n$ - натуральні числа, то натуральними *дільниками числа а будуть лише числа* $в = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot p_3^{\beta_3} \cdot \ldots \cdot p_n^{\beta_n}$, *де* $0 \le \beta_1 \le \alpha_1$, $0 \le \beta_2 \le \alpha_2$, $0 \le \beta_3 \le \alpha_3, \ldots,$ $0 \le \beta_n \le \alpha_n$. ***Кількість усіх дільників числа а дорівнює*** $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)(\alpha_3 + 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha_n + 1)$.

Приклад 31. Скільки натуральних дільників має число 120.

Розв'язання. Канонічний розклад числа $120 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^1 = 2^{\beta_1} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 5^{\beta_3}$, де $0 \le \beta_1 \le 3$, $0 \le \beta_2 \le 1, 0 \le \beta_3 \le 1$. Кількість дільників числа 120 дорівнює кількості наборів, які можна скласти з чисел β_1, β_2, β_3. Число β_1 можна вибрати 3+1=4 способами, число β_2 - 1+1=2 способами, число β_3 - 1+1=2 способами. Отже, за узагальненим правилом добутку зазначений набір можна вибрати $4 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ способами. Тому дане число має 16 дільників.

Конгруенції та їхні властивості. Теорема Ейлера і мала теорема Ферма

Теорема. *Якщо цілі числа а і в при діленні на натуральне число т дають однакові остачі, то* $(a - в) \vdots m$.

Теорема. *Якщо цілі числа а і в такі, що* $(a - в) \vdots m$, *де т – натуральне число, то числа а і в дають однакові остачі при діленні на т.*

Означення. *Цілі числа а і в називаються конгруентними за модулем т* $(m \in N)$, *якщо остачі при діленні їх на число т рівні. Пишуть* $a \equiv в$ *(mod m) – читають а конгруентне в за модулем т. Приклад:* $7 \equiv 10$ *(mod 3),* $11 \equiv -1$ *(mod 3),* $12 \equiv 0$ *(mod 6).*

Теорема. *Для того щоб цілі числа а і в були конгруентними за модулем т, де* $m \in N$, *необхідно й достатньо, щоб різниця а-в ділилася націло на т.*

Властивості конгруенцій (a, в, c, d – цілі числа, m і n – натуральні)

1. *Якщо* $a \equiv в$ *(mod m),* $в \equiv c$ *(mod m), то* $a \equiv c$ *(mod m).*
2. *Якщо* $a \equiv в$ *(mod m), то* $a + c \equiv в + c$ *(mod m).*
3. *Якщо* $a \equiv в$ *(mod m), то* $ac \equiv вc$ *(mod m).*
4. *Якщо* $a \equiv в$ *(mod m) і* $c \equiv d$ *(mod m), то* $a \pm c \equiv b \pm d$ *(mod m).*
5. *Якщо* $a \equiv в$ *(mod m) і* $c \equiv d$ *(mod m), то* $ac \equiv bd$ *(mod m).*
6. *Якщо* $a \equiv в$ *(mod m), то* $a^n \equiv b^n$ *(mod m).*

Приклад 32. Довести, що число $3^{105} + 4^{105}$ кратне 13.

Розв'язання. Застосуємо властивості конгруенцій. Число $105 = 3 \cdot 35$, тому $3^3 = 27 \equiv 1 (\bmod 13)$, $(3^3)^{35} = 3^{105} \equiv 1^{35} = 1 (\bmod 13)$; $4^3 = 64 \equiv -1 (\bmod 13)$, $(4^3)^{35} = 4^{105} \equiv (-1)^{35} = -1 (\bmod 13)$. Додаючи конгруенції, маємо: $3^{105} + 4^{105} \equiv 1 - 1 = 0 (\bmod 13)$. Отже, число $3^{105} + 4^{105}$ кратне 13. *Дане завдання можна було б розв'язати іншими способами, за теоремою Безу, за формулою чи дослідити останню цифру степенів.*

Приклад 33. ***(базова задача)*** Знайти остачу при діленні числа n^4 на 5, де $n \in Z$.

Розв'язання. При діленні n на 5 можливі наступні випадки: $n \equiv 0 \pmod 5$, $n \equiv 1 \pmod 5$, $n \equiv 2 \pmod 5$, $n \equiv 3 \pmod 5$, $n \equiv 4 \pmod 5$. Використаємо властивість конгруенції піднісши кожну конгруенцію до четвертого степеня. Маємо: $n^4 \equiv 0^4 \equiv 0 \pmod 5$, $n^4 \equiv 1^4 \equiv 1 \pmod 5$, $n^4 \equiv 16 \pmod 5 \equiv 1 \pmod 5$, $n^4 \equiv 81 \pmod 5 \equiv 1 \pmod 5$, $n^4 \equiv 256 \pmod 5 \equiv 1 \pmod 5$. Отже, при діленні n^4 на 5 можливі остачі 0 або 1.

Приклад 34. Знайти остачу від ділення числа 5^{99} на 3.

Розв'язання. Зрозуміло, що $5^{99} = (5^3)^{33} = 125^{33}$. Використовуючи властивості конгруенцій, маємо: $125 \equiv -1 \pmod 3$, тоді $125^{33} \equiv (-1)^{33} \equiv -1 \equiv 2 \pmod 3$.

Приклад 35. Доведіть, що при будь-якому $n \in N$ значення виразу $2^{4n+3} + 13 \cdot 3^{2n}$ кратне 7.

Розв'язання. Використаємо властивості степеня: $2^{4n+3} + 13 \cdot 3^{2n} = 2^3 \cdot 2^{4n} + 13 \cdot 9^n = 8 \cdot 16^n + 13 \cdot 9^n$. Застосуємо властивості конгруенцій, маємо: $16 \equiv 2 \pmod 7$, $9 \equiv 2 \pmod 7$, тоді $16^n \equiv 2^n \pmod 7$ і $9^n \equiv 2^n \pmod 7$, $8 \cdot 16^n + 13 \cdot 9^n \equiv 8 \cdot 2^n + 13 \cdot 2^n \equiv 21 \cdot 2^n \equiv 0 \pmod 7$. Отже, значення виразу $2^{4n+3} + 13 \cdot 3^{2n}$ кратне 7.

Приклад 36. Якою цифрою закінчується число $9999^{999^{999}}$.

Розв'язання. Остання цифра числа утворює число, що є остачею при діленні числа $9999^{999^{999}}$ на 10. Використаємо властивості конгруенцій $9 \equiv -1 \pmod{10}$, $9^2 = 81 \equiv 1 \pmod{10}$, отже $9^{2n} \equiv 81^n \equiv 1^n \equiv 1 \pmod{10}$, $9^{2n+1} \equiv 9^{2n} \cdot 9 \equiv 1 \cdot 9 \equiv 9 \pmod{10}$. Так, як показник степеня 999^{999} - це непарне число, то число остання цифра числа $9999^{999^{999}}$ буде 9.

Приклад 37. Якщо a і $в$ цілі числа, а $n \in N$, то $(7a+3)^{2n+1} + (7b+25)^{2n+1} \vdots 7$.

Розв'язання. Використаємо властивості конгруенцій $7a + 3 \equiv 3 \pmod 7$, то $(7a+3)^{2n+1} \equiv 3^{2n+1} \pmod 7$, відповідно $25 \equiv -3 \pmod 7$, $7b + 25 \equiv -3 \pmod 7$, то $(7b+3)^{2n+1} \equiv -3^{2n+1} \pmod 7$. Отже, $(7a+3)^{2n+1} + (7b+25)^{2n+1} \equiv 3^{2n+1} - 3^{2n+1} \equiv 0 \pmod 7$. Значить $(7a+3)^{2n+1} + (7b+25)^{2n+1} \vdots 7$.

Приклад 38. Довести, що якщо а і в взаємно-прості з 3, то $a^2 + в^2$ не ділиться на 3.

Розв'язання. $НСД(a;3) = 1$, $НСД(в;3) = 1$, значить $a \equiv \pm 1 \pmod 3$, $a \equiv \pm 1 \pmod 3$. Тоді $a^2 + в^2 \equiv 1 + 1 \equiv 2 \pmod 3$, а значить $a^2 + в^2$ не ділиться на 3.

Приклад 39. Довести, що $(a^2 + в^2) \vdots 7$, тоді і тільки тоді, коли $a \vdots 7$ і $в \vdots 7$.

Розв'язання. 1) Якщо $a \vdots 7$ і $в \vdots 7$, то $(a^2+в^2) \vdots 7$.

2) Нехай $(a^2+в^2) \vdots 7$ і $a = 7n + r_1$, $b = 7n + r_2$, де $0 \le r_{1,2} < 7$. Тоді $r_{1,2}$ може набирати наступних значень 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. перебираючи всі можливі випадки, бачимо, що $(a^2+в^2) \vdots 7$ при $r_1 = r_2 = 0$, тобто коли $a \vdots 7$ і $в \vdots 7$.

Теорема Ейлера. *Якщо $a \in Z$ і $n \in N$, $n > 1$ взаємно прості (НСД $(a;b) = 1$), то $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod n$, де $\varphi(n)$ - функція Ейлера (означає кількість натуральних чисел, які не більші за n і взаємно-прості з ним).*

Приклад. $\varphi(10) = 4$, бо є числа 1, 3, 7, 9, що не перевищують 10 і взаємно-прості з 10.

Обчислити значення функції Ейлера можна, взявши канонічний розклад даного числа: $a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3} \cdot \ldots \cdot p_m^{\alpha_m}$ ***, то*** $\varphi(n) = n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{p_m}\right)$.

За допомогою даної теореми можна легко обчислювати модуль великих степенів.

Приклад 40. Обчислити $7^{222} \pmod{10}$.

Розв'язання. Маємо, що *НСД $(7;10) = 1$, тобто 7 і 10 взаємно-прості числа і $\varphi(10) = 4$, бо є числа 1, 3, 7, 9, що не перевищують 10 і взаємно-прості з 10. За теоремою Ейлера $7^4 \equiv 1 \pmod{10}$ і $222 = 4 \cdot 55 + 2$. Тому використовуючи властивості конгруенцій маємо: $(7^4)^{55} \equiv 1^{55} \pmod{10}$, $7^{220} \cdot 7^2 \equiv 1 \cdot 7^2 \equiv 49 \equiv 9 \pmod{10}$. Отже, остача при діленні числа* 7^{222} на 10 дорівнює 9.

Частковим випадком теореми Ейлера при простому n є мала теорема Ферма.

Мала Теорема Ферма. *Нехай n - просте число, a – ціле число, що не ділиться на n. Тоді $a^{n-1} \equiv 1 \pmod n$.*

Еквівалентне означення. *Нехай n - просте число, a – ціле число, що не ділиться на n. Тоді $a^n - a \equiv 0 \pmod n$.*

Приклад 41. Знайти остачу від ділення числа 3^{102} на 101.

Розв'язання. Так, як число 101 – просте, то за малою теоремою Ферма $3^{101-1} = 3^{100} \equiv 1 \pmod{101}$. Використовуючи властивості конгруенцій маємо: $3^{100} \cdot 3^2 = 3^{102} \equiv 1 \cdot 3^2 \equiv 9 \pmod{101}$. Отже, остача від ділення числа 3^{102} на 101 дорівнює 9.

Приклад 42. Доведіть, що коли натуральне число n не ділиться націло на 17, то або $(n^8 - 1) \vdots 17$, або $(n^8 + 1) \vdots 17$.

Розв'язання. Так, як число 17 – просте, то за малою теоремою Ферма $n^{17-1}=n^{16}\equiv 1(\mathrm{mod}\,17)$. Використовуючи властивості конгруенцій маємо: $n^{16}-1\equiv 1-1\equiv 0(\mathrm{mod}\,17)$, тобто $(n^{16}-1)\vdots 17$, $(n^{8}-1)(n^{8}+1)\vdots 17$. Отже, або $(n^{8}-1)\vdots 17$, або $(n^{8}+1)\vdots 17$.

Приклад 43. Знайти остачу від ділення числа $(86^{143}-31^{547})^{62}$ на 21.

Розв'язання. Застосуємо властивості конгруенцій.

1) Число $86\equiv 2(\mathrm{mod}\,21)$, тому $86^{143}\equiv 2^{143}(\mathrm{mod}\,21)$. Обчислимо $2^{143}(\mathrm{mod}\,21)$: *НСД* $(2;21)=1$, *тобто 2 і* $21=3\cdot 7$ *взаємно-прості числа і* $\varphi(21)=21\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{7}\right)=21\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{6}{7}=12$. *За теоремою Ейлера* $2^{12}\equiv 1(\mathrm{mod}\,21)$. *Використовуючи властивості конгруенцій маємо:* $(2^{12})^{12}=2^{144}\equiv 1^{12}=1(\mathrm{mod}\,21)$, $2^{144}\equiv 1+21=22(\mathrm{mod}\,21)$, *тоді* $2^{143}\equiv 11(\mathrm{mod}\,21)$. *Отже, остача при діленні числа* 86^{143} на 21 дорівнює 11.

2) Число $31\equiv 10(\mathrm{mod}\,21)$, тому $31^{547}\equiv 10^{547}(\mathrm{mod}\,21)$. Обчислимо $10^{547}(\mathrm{mod}\,21)$: *НСД* $(10;21)=1$, *тобто 10 і* $21=3\cdot 7$ *взаємно-прості числа і* $\varphi(21)=21\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{7}\right)=21\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{6}{7}=12$. *За теоремою Ейлера* $10^{12}\equiv 1(\mathrm{mod}\,21)$, *а* $547=12\cdot 45+7$. *Використовуючи властивості конгруенцій маємо:* $(10^{12})^{45}=10^{540}\equiv 1^{45}=1(\mathrm{mod}\,21)$, $10^{540}\cdot 10^{7}\equiv 1\cdot 10^{7}=10^{7}(\mathrm{mod}\,21)$, *тоді* $10^{2}=100\equiv -5(\mathrm{mod}\,21)$, $(10^{2})^{3}=10^{6}\equiv(-5)^{3}=-125=1(\mathrm{mod}\,21)$, $10^{7}\equiv 10(\mathrm{mod}\,21)$. *Отже,* $31^{547}\equiv 10(\mathrm{mod}\,21)$ *остача при діленні числа* 31^{547} на 21 дорівнює 10.

3) Таким чином, $86^{143}-31^{547}\equiv 11-10=1$, *отже* $(86^{143}-31^{547})^{62}\equiv 1^{62}=1(\mathrm{mod}\,21)$. Остача від ділення числа $(86^{143}-31^{547})^{62}$ на 21 дорівнює 1.

Приклад 44. Довести, що $(3299^{5}+6)^{18}-1$ націло ділиться на 112.

Розв'язання. Оскільки дільник 112 є число складене і досить велике, то доцільно його розкласти на взаємно-прості множники, тобто $112=2^{4}\cdot 7$. Число 16 і 7 взаємно-прості, тому доведемо окремо, що число ділиться на 16 і 7.

1) Доведемо, що $(3299^{5}+6)^{18}-1$ націло ділиться на 16. Число $3299=16\cdot 206+3$, тобто $3299\equiv 3(\mathrm{mod}\,16)$, $3299^{5}\equiv 3^{5}=243\equiv 3(\mathrm{mod}\,16)$, $3299^{5}+6\equiv 9(\mathrm{mod}\,16)$, $(3299^{5}+6)^{18}\equiv 9^{18}(\mathrm{mod}\,16)$. Легко помітити, що $9^{2}\equiv 1(\mathrm{mod}\,16)$, тому $(3299^{5}+6)^{18}\equiv 9^{18}\equiv 1(\mathrm{mod}\,16)$, отже $(3299^{5}+6)^{18}-1\equiv 1-1=0(\mathrm{mod}\,16)$. Число $(3299^{5}+6)^{18}-1$ ділиться націло на 16.

2) Доведемо, що $(3299^5+6)^{18}-1$ націло ділиться на 7. Число $3299=7\cdot 471+2$, тобто $3299\equiv 2(\mathrm{mod}\,7)$, $3299^5\equiv 2^5=32\equiv 4(\mathrm{mod}\,7)$, $3299^5+6\equiv 10\equiv 3(\mathrm{mod}\,7)$, $(3299^5+6)^{18}\equiv 3^{18}(\mathrm{mod}\,7)$. Оскільки числа 3 і 7 взаємно прості і 7 –просте число, то, за малою теоремою Ферма, $3^{7-1}=3^6\equiv 1(\mathrm{mod}\,7)$. Отже, $(3299^5+6)^{18}\equiv 3^{18}\equiv 1(\mathrm{mod}\,7)$ і $(3299^5+6)^{18}-1\equiv 1-1=0(\mathrm{mod}\,7)$. Число $(3299^5+6)^{18}-1$ ділиться націло на 7. Висновок: число $(3299^5+6)^{18}-1$ націло ділиться на 112.

Приклад 45. Знайти дві останні цифри числа 3^{100}.

Розв'язання. Дві останні цифри числа утворюють число, що є остачею при діленні числа 3^{100} на 100. Застосуємо властивості числових конгруенцій. Числа 3 і 100 взаємно прості, бо $НСД(3;100)=1$. Застосуємо теорему Ейлера , де $100=5^2\cdot 2^2$, $\varphi(100)=100\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)=100\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5}=40$, тому $3^{40}\equiv 1(\mathrm{mod}\,100)$. Знаходимо $(3^{40})^2=3^{80}\equiv 1(\mathrm{mod}\,100)$. Треба знайти остачу від ділення 3^{20} на 100. $3^5=243\equiv 43(\mathrm{mod}\,100)$, тоді $(3^5)^2=3^{10}\equiv 43^2=1849\equiv 49(\mathrm{mod}\,100)$, $(3^{10})^2=3^{20}\equiv 49^2=2401\equiv 1(\mathrm{mod}\,100)$. Тому $3^{100}=3^{80}\cdot 3^{20}\equiv 1(\mathrm{mod}\,100)$. Таким чином, останні дві цифри нашого числа 01.

Приклад 46. Знайти дві останні цифри числа $7^{9^{9^9}}$.

Розв'язання. Дві останні цифри числа утворюють число, що є остачею при діленні числа $7^{9^{9^9}}$ на 100. Але показник степеня сам є степенем і його треба розглянути окремо. Оскільки $9\equiv 1(\mathrm{mod}\,8)$, то $9^9\equiv 1^9=1(\mathrm{mod}\,8)$, $9^{9^9}\equiv 1^9=1(\mathrm{mod}\,8)$, тобто число 9^{9^9} можна представити у вигляді $9^{9^9}=8m+1$, де $m\in N$. Отже, $7^{9^{9^9}}=7^{8m+1}$, $m\in N$. Використовуючи властивості конгруенцій маємо: $7^4=2401\equiv 1(\mathrm{mod}\,100)$, $(7^4)^{2m}=7^{8m}\equiv 1^{2m}=1(\mathrm{mod}\,100)$, $7^{8m}\cdot 7=7^{8m+1}\equiv 1\cdot 7=7(\mathrm{mod}\,100)$. Таким чином, останні дві цифри нашого числа 07.

Спосіб знаходження остач при діленні на натуральне число *k*

1. *Переконуємося, що заданий числовий вираз містить лише суми, добутки і степені цілих чисел.*
2. *Для кожного доданка, співмножника чи основи степеня знаходимо його остачу r при діленні на k (якщо остача більша за $\frac{k}{2}$, то іноді зручно замість остачі r взяти від'ємне число $r-k$, яке дає ту ж саму остачу r при діленні на k).*
3. *Підставляємо одержані числа в заданий вираз (замість відповідних доданків, співмножників чи основ степенів) і одержуємо число, яке дає ту ж саму остачу при діленні на k, що й заданий вираз.*

Приклад 47. Знайти остачу при діленні числа $9^{1999}+1997\cdot 1998\cdot 1999$на 8.

Розв’язання. 9 при діленні на 8 дає остачі 1, 1997 при діленні на 8 дає в остачі 5, 1998 при діленні на 8 дає в остачі 6, 1999 при діленні на 8 дає в остачі 7. Тоді початкове число при діленні на 8 дає таку ж остачу, як і число $1^{1999}+5\cdot 6\cdot 7=211$, тобто 3.

Ці завдання можна розв’язувати за допомогою конгруенцій, а це просто штучний алгоритм розв’язування.

Теорема Безу. Ділення многочлена «куточком»

Теорема Безу. *Остача від ділення многочлена $P(x)$ на двочлен x-a дорівнює значенню цього многочленна при x=a, тобто $r=P(a)$.*

Наслідок: *Якщо x=a – корінь многочлена $P(x)$ (тобто $P(a)=0$), то цей многочлен ділиться без остачі на x-a.*

Приклад 48. Знайти остачу від ділення многочлена P(x)=x^3 –3x+4 на двочлен x-2.

Розв’язання. ***1 спосіб.*** За теоремою Безу: R=P(2)=8-6+4=6

2 спосіб.

Виконаємо поділ кутом, маємо:

$$
\begin{array}{r|l}
-\;x^3-3x+4 & x-2 \\ \cline{2-2}
\underline{x^3-2x^2} & x^2+2x+1 \\
-\;2x^2-3x & \\
\underline{2x^2-4x} & \\
-\;x+4 & \\
\underline{x-2} & \\
6 &
\end{array}
$$

Отже, остача R=6.

Приклад 49. Знайти всі цілі значення x, при яких дріб $\frac{x^3+1}{x-1}$ буде цілим числом.

Розв’язання. Виконаємо поділ кутом, маємо: $\frac{x^3+1}{x-1}=x^2+x+1+\frac{2}{x-1}$. Щоб при цілих значеннях x вираз $\frac{x^3+1}{x-1}$ приймав цілі значення, потрібно, щоб дріб $\frac{2}{x-1}$ приймав цілі значення. Підбором це можливо при x=-1; 0; 2; 3.

Наслідки з теореми Безу

1. *Вираз $x^n - a^n$ ділиться без остачі на x-a.*
2. *Вираз $x^{2n} - a^{2n}$ ділиться без остачі на x+a.*
3. *Вираз $x^{2n-1} + a^{2n-1}$ ділиться без остачі на x+a.*
4. *Вираз $x^{2n-1} - a^{2n-1}$ не ділиться без остачі на x+a.*
5. *Вираз $x^{2n} + a^{2n}$ не ділиться без остачі на x+a.*

Формули для розкладання на множники виразів виду $a^n \pm b^n$

1. $a^n - b^n = (a - в)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + ... + ab^{n-2} + b^{n-1})$, *де n – будь-яке натуральне число.*

2. $a^n + b^n = (a + в)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - ... - ab^{n-2} + b^{n-1})$, *де n – непарне натуральне число.*

Приклад 50. Доведіть, що $10000^{1006} - 87^{2012}$ ділиться націло на 13.

Розв'язання. ***1 спосіб.*** Виконаємо перетворення $10000^{1006} - 87^{2012} = 100^{2012} - 87^{2012}$. За наслідком з теореми Безу $x^n - a^n$ ділиться без остачі на x-a, тобто початкове число ділиться на 100-87=13.

2 спосіб. Використаємо формулу $a^n - b^n = (a - в)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + ... + ab^{n-2} + b^{n-1})$, де n – будь-яке натуральне число.

Приклад 51. Доведіть, що $2012^{22} - 1$ ділиться націло на 2013.

Розв'язання. За наслідком з теореми Безу вираз $x^{2n} - a^{2n}$ ділиться без остачі на x+a, тобто початкове число ділиться на 2012+1=2013.

Приклад 52. Доведіть, що $1 + 2^{2013} + 3^{2013} + ... + 1000^{2013}$ ділиться націло на 1001.

Розв'язання. ***1 спосіб.*** Згрупуємо доданки наступним чином:

$$1 + 2^{2013} + 3^{2013} + ... + 1000^{2013} = (1^{2013} + 1000^{2013}) + (2^{2013} + 999^{2013}) + (3^{2013} + 998^{2013}) + ... + (500^{2013} + 501^{2013}).$$

За наслідком з теореми Безу вираз $x^{2n-1} + a^{2n-1}$ ділиться без остачі на x+a. Тобто вирази $(1^{2013} + 1000^{2013})$, $(2^{2013} + 999^{2013})$, $(3^{2013} + 998^{2013})$,…, $(500^{2013} + 501^{2013})$ діляться відповідно на $1 + 1000 = 1001$, $2 + 999 = 1001$, $3 + 998 = 1001$,…, $500 + 501 = 1001$. Отже і початковий вираз ділиться на 1001.

2 спосіб. Використати формулу $a^n + b^n = (a + в)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - ... - ab^{n-2} + b^{n-1})$, де n – непарне натуральне число.

Приклад 53. Довести, що вираз $3^{4n+4} - 4^{3n+3}$ ділиться на 17.

Розв’язання. Виконаємо перетворення $3^{4(n+1)}-4^{3(n+1)}=81^{n+1}-64^{n+1}$. За наслідком з теореми Безу x^n-a^n ділиться без остачі на х-а, тобто на 81-64=17.

мав цілі значення. Підбором це можливо при х=-1; 0; 2; 3.

Метод математичної індукції

1. Початок індукції: перевіряємо, чи виконується твердження при n=1 (іноді починають з n=p).

2. Припускаємо, що задане твердження справедливе при n=k, де $k \ge 0$.

3. Доводимо (спираючись на припущення) справедливість нашого твердження і при n=k+1. Робимо висновок.

Приклад 54. Доведіть, що 10^n-9n-1 ділиться на 81 при будь-якому $n \in N$.

Розв’язання. Використаємо метод математичної індукції.

1. Перевіряємо, чи виконується твердження при n=1: 10-9-1=0, тобто ділиться на 81.
2. Припускаємо, що задане твердження справедливе при n=k, тобто $(10^k-9k-1)\vdots 81$.
3. Доведемо, що задане твердження виконується при n=k+1. Маємо:

$$10^{k+1}-9(k+1)-1=10^k\cdot 10-9k-9-1=10\cdot(10^k-9k-1)+81k.$$

Перший доданок останньої суми ділиться на 81 за припущенням індукції, другий теж ділиться на 81. Отже, вся сума ділиться на 81.

Практичне заняття. Завдання для самостійного розв’язання

1. Доведіть, що сума чотирьох послідовних натуральних степенів числа 3 кратна 120.
2. Доведіть, що число $2007^{2012}+99$ ділиться на 10.
3. Доведіть, що сума $2+2^3+2^5+...+2^{97}+2^{99}$ ділиться на 5.
4. Обчисліть $2^{2012}-2^{2011}-2^{2010}-...-2^2-2-1$.
5. Відомо, що натуральні числа m і n такі, що значення виразу $10m+n$ ділиться націло на 11. Доведіть, що значення виразу $(10m+n)(10n+m)$ ділиться націло на 121.

6. Цілі числа x і y такі, що $(6x+11y)\vdots 31$. Доведіть, що $(x+7y)\vdots 31$.
7. До деякого двоцифрового числа ліворуч і праворуч дописали цифру 1. У результаті отримали число, яке в 21 раз більше за дане. Знайдіть дане двоцифрове число.
8. Цифру 9, із якої починається трицифрове число, написали в кінці числа. Нове число на 216 менше, ніж початкове. Яке було початкове число.
9. Доведіть, що при будь-якому цілому значенні n вираз n^5-5n^3+4n кратний 120.
10. Доведіть, що при будь-якому натуральному значенні n вираз:
11. 1) n^2+3n кратний 2; 2) n^3+5n кратний 3.

12. Доведіть, що серед будь-яких 101 натуральних чисел можна вибрати два, різниця яких ділиться на 100.
13. Має листок паперу. Розрізаємо його на 4 частини, а потім деякі з них ще на 4 частини. Таку операцію розрізування повторили кілька разів. Чи можна в результаті таких операцій отримати 50 частин?
14. Доведіть, що при будь-якому натуральному значенні n дроби будуть нескоротними:
15. $$\frac{3n+1}{15n+14}, \qquad \frac{16n+1}{40n+2}.$$

16. Скільки різних натуральних дільників мають числа: 1024, $2^4\cdot 3^6\cdot 5^3$.
17. Доведіть, що при будь-якому натуральному значенні n, значення виразу:
18. а) $11^n+14\cdot 6^n$ кратне 5; б) 21^n+2^{2n+4} кратне 17; в) $5^{2n+1}+2^{n+4}+2^{n+1}$ кратне 23.

19. Знайти остачу від ділення числа a на число $в$, якщо:
20. а) $a=5^{52}$, $в=53$; б) $a=2^{47}$, $в=41$.

21. Знайти остачу від ділення 383^{175} на 45.
22. Знайти останню цифру числа 777^{777}.
23. Доведіть, що число $7^{2012^{2014}}-3^{2000^{2011}}$ ділиться на 10.
24. Знайти остачу при діленні числа $2005^{2n+1}\cdot 2007^{2n}$ на 1003.
25. Знайти остачу при діленні числа $23^{2012}+1434\cdot 1435\cdot 1436$ на 22.
26. Знайдіть всі натуральні а, при яких дріб $\dfrac{a^3+2a+3}{a-1}$ буде натуральним числом.
27. Доведіть, що $2012^{22}-1$ ділиться на 2011.
28. Доведіть, що при будь-якому натуральному значенні n вираз $7^{2n}+3^{2n}+30\cdot 21^n$ кратний 16.
29. Доведіть, що при будь-якому натуральному значенні n вираз 5^n-2^{n+1} кратний 3.

Контрольна робота.

1. Доведіть, що число $3^{2012}+104$ ділиться на 5.
2. Доведіть, що сума $2+2^2+2^3+...+2^{51}+2^{52}$ ділиться на 30.
3. Відомо, що $(2x+3y)\vdots 17$, якщо $x, y \in Z$. Доведіть, що $(9x+5y)\vdots 17$.
4. Цифра десятків двозначного числа вдвічі менше за цифру одиниць. Якщо ці цифри поміняти місцями, то отримане число буде більшим від даного на 27. Знайдіть дане число.
5. Доведіть, що при будь-якому цілому значенні n вираз $2n^6-n^4-n^2$ кратний 6.
6. Було 4 аркушів паперу. Деякі з них розрізали на 4 кусків кожен. Таку операцію розрізування
7. Доведіть, що при будь-якому натуральному значенні *n* дроби будуть нескоротними $\dfrac{4n+3}{20n+23}$.
8. Доведіть, що $222^{333}+333^{222}$ ділиться націло на 13.
9. Знайдіть дві останні цифри числа 2^{100}.
10. Знайдіть остачу при діленні числа $12^{2014}+2577\cdot 2578$ на 11.
11. Знайдіть всі натуральні а, при яких дріб $\dfrac{a^3+2a+3}{a-1}$ буде натуральним числом.
12. Доведіть, що $1+2^{1001}+3^{1001}+...+2012^{1001}$ ділиться націло на 2013.

Діофантові рівняння. Лекційно-практичний матеріал

Діофантовими рівняннями називають рівняння з раціональними коефіцієнтами з вимогою визначити розв'язки у цілих або раціональних числах. Так, як діофантове рівняння має кілька змінних то такі рівняння ще називають невизначеними.

Мета роботи ознайомити учнів 7-9 класів зі способами розв'язування діофантових рівнянь. Водночас діофантові рівняння не являються програмною темою шкільного курсу математики, а тому вони зустрічаються в ролі завдань математичних олімпіад. Кожен спосіб супроводжується теоретичним обґрунтуванням, прикладами розв'язаних задач та задачами для самостійного розв'язування.

Розв'язати рівняння з двома змінними в цілих числах означає знайти всі пари цілих чисел, які є розв'язками цього рівняння або показати що їх немає.

Розглянемо рівняння в яких ліву частину можна розкласти на множники, а в правій частині рівняння буде ціле число, тоді замінимо рівняння сукупністю систем простіших рівнянь. Розглянемо також рівняння які розв'язуються методом виділення цілої та дробової частини.

Приклад 1. Розв'язати у цілих числах рівняння $xy = x + y$.

Розв'язання. ***1 спосіб.*** Виконаємо перетворення, щоб розкласти ліву частину на множники $xy - x - y = 0$, $x(y-1) - y + 1 = 1$, $x(y-1) - (y-1) = 1$, $(y-1)(x-1) = 1$. Звідси отримуємо, що значення виразів $x-1$ і $y-1$ є дільниками числа 1. Тоді можливі такі випадки:

1) $\begin{cases} x-1=1, \\ y-1=1; \end{cases} \begin{cases} x=2, \\ y=2; \end{cases}$ або 2) $\begin{cases} x-1=-1, \\ y-1=-1; \end{cases} \begin{cases} x=0, \\ y=0. \end{cases}$

Відповідь: $(0;0)$, $(2;2)$.

2 спосіб. Розв'яжемо дане рівняння відносно x: $xy - x = y$; $x(y-1) = y$; $x = \dfrac{y}{y-1}$.

Виділимо цілу і дробову частину: $x = \dfrac{y}{y-1} = \dfrac{y-1+1}{y-1} = 1 + \dfrac{1}{y-1}$. Так як $\dfrac{1}{y-1}$ повинно бути цілим числом, то $y-1 = \pm 1$, звідки знаходимо дві пари цілих розв'язків: $(2;2)$; $(0;0)$.

Відповідь: $(2;2)$; $(0;0)$

Приклад 2. Розв'язати у цілих числах рівняння $xy = x + 2y + 1991$.

Розв'язання. Виконаємо перетворення, щоб розкласти ліву частину на множники $xy - x - 2y = 1991$, $x(y-1) - 2y + 2 = 1991 + 2$, $x(y-1) - 2(y-1) = 1993$, $(y-1)(x-2) = 1993$. Так, як 1993 – просте число, то отримуємо, що значення виразів $x-2$ і $y-1$ є дільниками числа 1993. Тоді можливі такі випадки:

1) $\begin{cases} x-2=1, \\ y-1=1993; \end{cases} \begin{cases} x=3, \\ y=1994; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x-2=-1, \\ y-1=-1993; \end{cases} \begin{cases} x=1, \\ y=-1992; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x-2=1993, \\ y-1=1; \end{cases} \begin{cases} x=1995, \\ y=2; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x-2=-1993, \\ y-1=-1; \end{cases} \begin{cases} x=-1991, \\ y=0. \end{cases}$

Відповідь: $(3;1994)$, $(1;-1992)$, $(1995;2)$, $(-1991;0)$.

Приклад 3. Розв'язати у натуральних числах рівняння $2x^2 + 5xy - 12y^2 = 28$.

Розв'язання. Виконаємо перетворення, щоб розкласти ліву частину на множники $2x^2 - 3xy + 8xy - 12y^2 = 28$, $x(2x-3y) + 4y(2x-3y) = 28$, $(2x-3y)(x+4y) = 2 \cdot 2 \cdot 7$. З останньої рівності зробимо висновок, що $x + 4y \ge 5$, бо за умовою задачі $x; y \in N$. Звідси отримуємо, що значення виразів $x+4y$ і $2x-3y$ можуть набирати наступних значень:

1) $\begin{cases} x+4y=7, \\ 2x-3y=4; \end{cases}$ $\begin{cases} x=7-4y, \\ 2(7-4y)-3y=4; \end{cases}$ з другого рівняння системи $y=\frac{10}{11}$, отже натуральних розв'язків немає.

2) $\begin{cases} x+4y=14, \\ 2x-3y=2; \end{cases}$ $\begin{cases} x=14-4y, \\ 2(14-4y)-3y=2; \end{cases}$ з другого рівняння системи $y=\frac{26}{11}$, отже натуральних розв'язків немає.

3) $\begin{cases} x+4y=28, \\ 2x-3y=1; \end{cases}$ $\begin{cases} x=28-4y, \\ 2(28-4y)-3y=1; \end{cases}$ з другого рівняння системи $y=5$, тоді $x=8$

Відповідь: $(8;5)$.

Приклад 4. Розв'язати в цілих числах рівняння $2y^2-2x^2+3xy+x-2y-2=0$.

Розв'язання. Розкладемо ліву частину рівняння на множники:

$$(2y^2+4xy-2y)-(2x^2+xy-x)=2,$$

$$2y(y+2x-1)-x(y+2x-1)=2,$$

$$(2y-x)(y+2x-1)=2.$$

Можливі випадки:

$$\begin{cases} 2y-x=1 \\ y+2x-1=2 \end{cases} \text{або} \begin{cases} 2y-x=2 \\ y+2x-1=1 \end{cases} \text{або} \begin{cases} 2y-x=-1 \\ y+2x-1=-2 \end{cases} \text{або} \begin{cases} 2y-x=-2 \\ y+2x-1=-1 \end{cases}$$

Розв'язавши системи рівнянь отримуємо наступні пари $(1;1)$; $(\frac{2}{5};\frac{6}{5})$; $(-\frac{1}{5};-\frac{3}{5})$; $(\frac{2}{5};-\frac{4}{5})$, але за умовою завдання задовольняє лише пара $(1;1)$.

Відповідь: $(1;1)$.

Приклад 5. Розв'язати рівняння у цілих числах $y^2-2xy-2x=6$.

Розв'язання. Знайдемо з рівняння вираз 2x:

$$y^2-6=2xy+2x,$$

$$y^2-6=2x(y-1),$$

$2x=\frac{y^2-6}{y-1}$, якщо $y=1$, то з початкового рівняння x буде не ціле число, тому

$$y\neq 1.$$

Виділимо цілу і дробову частину в останній рівності, маємо:

$$2x=\frac{y^2-6}{y-1}=\frac{y^2-1-5}{y-1}=y+1-\frac{5}{y-1}.$$

За умовою задачі вираз $\frac{5}{y-1}$ повинен набирати цілих значень, а це можливо лише при $y-1=\pm1$ або $y-1=\pm5$.

Звідки знаходимо пари цілих розв'язків. $(-1;2);(3;0);(3;6);(-1;-4)$.

Відповідь: $(-1;2);(3;0);(3;6);(-1;-4)$.

Приклад 6. Розв'язати рівняння в цілих числах $x^3-x^2-xy-17x-3y+8=0$.

Розв'язання. Розв'яжемо дане рівняння відносно y:

$$x^3-x^2-17x+8=xy+3y,$$

$$x^3-x^2-17x+8=y(x+3),$$

$y=\frac{x^3-x^2-17x+8}{x+3}$, якщо $x=-3$, то в початковому рівнянні y буде не ціле число, тому $x\neq-3$.

Виділимо цілу і дробову частину в останній рівності, для цього виконаємо ділення кутом, маємо:

$y=x^2-4x-5+\frac{23}{x+3}$.

За умовою задачі вираз $\frac{23}{x+3}$ повинен набирати цілих значень, а це можливо лише при $x+3=\pm1$ або $x+3=\pm23$.

Обчислюючи, знаходимо, що пари цілих розв'язків: $(-2;30);(-4;4);(20;316);$ $(-26;774)$.

Відповідь: $(-2;30);(-4;4);(20;316);$ $(-26;774)$.

Приклад 7. З квадратного аркуша паперу в клітинку, який містить ціле число клітинок, вирізали квадрат, у якому також виявилося ціле число клітинок. На частині аркуша, що залишилась, рівно 124 клітинки. Скільки клітинок мав аркуш паперу?

Розв'язання. Нехай початковий аркуш паперу мав довжину однієї сторони x клітинок, а довжина тієї частини, що вирізали y клітинок, де $x;y\in N$ і зрозуміло, що $x>11$, бо якщо залишилося 124 клітинки, то на початку не могло б бути 121 клітинка при x=11. За умовою задачі отримуємо наступне рівняння:

$x^2-y^2=124$, $(x-y)(x+y)=2\cdot2\cdot31$. Враховуємо також, що $x+y>x-y$, $x+y>12$. Отримуємо, що значення виразів $x+y$ і $x-y$ можуть набирати наступних значень:

1) $\begin{cases} x+y=31, \\ x-y=4; \end{cases}$ додавши два рівняння $2x=35$, $x=\frac{35}{2}$, отже натуральних розв'язків немає.

2) $\begin{cases} x+y=62, \\ x-y=2; \end{cases}$ додавши два рівняння $2x=64$, $x=32$, тоді $y=30$.

3) $\begin{cases} x+y=124, \\ x-y=1; \end{cases}$ додавши два рівняння $2x=125$, $x=\frac{125}{2}$, отже натуральних розв'язків немає.

Отже, аркуш паперу мав $32\cdot32=1024$ клітинок.

Відповідь: 1024.

Приклад 8. Розв'яжіть рівняння у цілих числах $x^2-y^2=14$.

Розв'язання. Виконаємо перетворення, щоб розкласти ліву частину на множники $(x-y)(x+y)=14$.

1 спосіб. Можна розв'язати рівняння, як розв'язували в попередніх прикладах перейшовши розв'язувати не складні системи рівнянь.

2 спосіб. Значення виразів $x+y$ і $x-y$ завжди мають однакову парність. Якщо числа $x+y$ і $x-y$ парні, то ліва частина рівняння ділиться на 4, але 14 на 4 не ділиться. Якщо числа $x+y$ і $x-y$ непарні, то ліва частина рівняння число непарне, але 14 парне число. Отже, рівняння $x^2-y^2=14$ не має розв'язків у цілих числах.

3 спосіб. Відомо, що остача при діленні квадрата цілого числа на 3 дорівнює 0 або 1. Тому, x^2 і y^2 при діленні на 3 дають остачу 0 або 1, а x^2-y^2 при діленні на 3 дає остачу 0; 1; -1, але остача при діленні на 3 числа 14 дорівнює 2. Отже, рівняння $x^2-y^2=14$ не має розв'язків у цілих числах.

Розглянемо лінійне рівняння з двома змінними. Лінійне рівняння з двома змінними має вид $ax+by=c$, a,b,c - будь-які числа і на множині раціональних чисел має безліч розв'язків. Ми розглянемо лінійні рівняння в яких a,b,c- цілі числа, при умові, що $x;y$ також цілі числа. Розглянемо кілька способів розв'язування таких рівнянь.

Один з найпростіших способів розв'язування лінійного рівняння з двома змінними у цілих числах це використання відомої теореми: якщо a ***і*** $в$ ***взаємно прості числа , тобто*** $НСД(a;в)=1$***, і*** $(x_0;y_0)$ ***- один із розв'язків рівняння*** $ax+by=c$***, тоді усі розв'язки цього рівняння знайдемо за формулами*** $x=x_0+bn$***;*** $y=y_0-an$***, де*** $n\in Z$***.***

Запам'ятайте: якщо в рівнянні $ax+by=c$ $НСД(a;в)=d$***, а с не ділиться націло на*** d***, то рівняння*** $ax+by=c$ ***не має розв'язків в цілих числах.***

Теорема. Найбільший спільний дільник чисел а і в можна виразити через числа а і в у вигляді $ax+by$***, де*** $x;y\in Z$***.***

Приклад 9. Розв'язати рівняння у цілих числах $15x-7y=13$.

Розв'язання. ***1 спосіб.*** Ми бачимо, що числа 15 і 7 взаємно прості, тобто $НСД(15;7)=1$. Легко побачити, пара чисел $(x_0;y_0)=(-1;-4)$ є одним з розв'язків заданого рівняння. Усі розв'язки рівняння знайдемо за формулами $x=x_0+bn$; $y=y_0-an$, де $n\in N$ і а=15, в=-7. Отже, $x=-1-7n$; $y=-4-15n$, де $n\in Z$.

Відповідь: $(-7n-1;-15n-4)$, $n\in Z$.

Якщо забули теорему, то можна розв'язати рівняння наступним чином, тобто так, як доводиться теорема.

Ми бачимо, що числа 15 і 7 взаємно прості, тобто $НСД(15;7)=1$. Легко побачити, пара чисел $(x_0;y_0)=(-1;-4)$ є одним з розв'язків заданого рівняння. Підставимо в рівняння пару чисел $(x_0;y_0)=(-1;-4)$, яка є розв'язком. Маємо $15\cdot(-1)-7\cdot(-4)=13$. Прирівнюючи ліві частини початкового рівняння і останньої рівності, маємо: $15x-7y=15\cdot(-1)-7\cdot(-4)$, $15(x+1)=7(y+4)$. Оскільки числа 15 і 7 взаємно прості, то $(x+1)=7n$, а $(y+4)=15n$, тоді $x=-1+7n$; $y=-4+15n$, де $n\in Z$.

Відповідь: $(7n-1;15n-4)$, $n\in Z$.

2 спосіб. Знайдемо ту змінну коефіцієнт при якій менший, тобто y: $7y=15x-13$, $y=\frac{15x-13}{7}$, $y=2x-2+\frac{x+1}{7}$. Зрозуміло, що y буде цілим числом, якщо $x+1=7n$, де $n\in Z$. З останньої рівності $x=7n-1$, а $y=2(7n-1)-2+\frac{7n}{7}=15n-4$, де $n\in Z$ усі розв'язки нашого рівняння.

Відповідь: $(-7n-1;-15n-4)$, $n\in Z$.

Якщо важко підбором знайти розв'язок рівняння, запропонуємо наступний алгоритм розв'язування рівняння $ax+by=c$***:***

1. ***За допомогою алгоритму Евкліда доведемо, що числа а і в взаємно прості.***
2. ***Знаходимо один із розв'язків рівняння $ax+by=1$, позначимо його $(k;l)$, (як це зробити покажемо на прикладі).***
3. ***Знаходимо один із розв'язків рівняння $ax+by=c$ за формулами $x_0=kc$ і $y_0=lc$.***
4. ***Знаходимо усі розв'язки рівняння $ax+by=c$ за формулами $x=x_0+bn$ і $y=y_0-an$, $n\in Z$.***

Покажемо приклад, який розв'яжемо алгоритмом записаним вище.

Приклад 10. Розв'язати рівняння у цілих числах $127x+52y=7$.

Розв'язання. Знайти конкретний розв'язок у даному випадку підбором дуже важко. Тому розв'яжемо рівняння наступним чином.

1. Застосуємо алгоритм Евкліда до чисел 127 і 52.

$$127=52\cdot 2+23,$$

$$52=23\cdot 2+6,$$

$$23=6\cdot 3+5,$$

$$6=5\cdot 1+1,$$

$$5=5\cdot 1.$$

Отже, числа 127 і 52 взаємно прості, бо $НСД(127;52)=1$.

2. Знайдемо один із розв'язків рівняння $127x+52y=1$, позначимо його $(k;l)$. Запишемо останні рівності наступним чином:

$$23=127-52\cdot 2,$$

$$6=52-23\cdot 2,$$

$$5=23-6\cdot 3,$$

$$1=6-5\cdot 1.$$

Тоді: $1=6-5\cdot 1=6-1\cdot(23-6\cdot 3)=4\cdot 6-23=4\cdot(52-23\cdot 2)-23=$

$$=4\cdot 52-9\cdot 23=4\cdot 52-9(127-52\cdot 2)=22\cdot 52-9\cdot 127=127\cdot(-9)+52\cdot 22=1.$$

Порівнюючи останній запис $127\cdot(-9)+52\cdot 22=1$ з рівнянням $127x+52y=1$, бачимо, що пара чисел $(k;l)=(-9;22)$ це один з розв'язків рівняння $127x+52y=1$.

3. Знаходимо один із розв'язків рівняння $127x+52y=7$ за формулами $x_0=kc$ і $y_0=lc$, де с=7. Отже, маємо: $x_0=kc=-9\cdot 7=-63$ і $y_0=lc=22\cdot 7=154$.

4. Знаходимо усі розв'язки рівняння $127x+52y=7$ за формулами $x=x_0+bn$ і $y=y_0-an$, $n\in Z$. Отже, маємо: $x=x_0+bn=-63+52n$, $y=y_0-an=154-127n$, $n\in Z$.

Відповідь $(52n-63;-127n+154)$, $n\in Z$.

Приклад 11. Для перевезення зерна є мішки по 60 кг і по 80 кг. Скільки потрібно мішків обох видів, щоб перевезти 440 кг зерна?

Розв'язання. Нехай x – кількість мішків, що вміщують по 60 кг, y – кількість мішків, що вміщують по 80 кг. За умовою задачі отримаємо рівняння $60x+80y=440$, спростивши яке маємо $3x+4y=22$ - це лінійне рівняння з двома змінними. Знайдемо з рівняння x: $x=\frac{22-4y}{3}=7-y+\frac{1-y}{3}$, отже $1-y=3n$, $y=1-3n$, $n\in Z$. Зрозуміло з умови задачі $x;y\in N$, тому при $n=0$ $y>0$, тобто $y=1$, в іншому випадку $y<0$, тоді $x=7-1+\frac{1-1}{3}=6$. Отже, потрібно взяти 6 мішків по 60 кг і 1 мішок по 80 кг, щоб повезти 440 кг зерна.

Приклад 12. Вік студента в 1997 році дорівнює сумі цифр року його народження. Скільки років студенту.

Розв'язання. Нехай студент народився в $\overline{19xy}$ році, де $0\le x\le 9$, $0\le y\le 9$, $x;y\in Z$. Його вік буде $1+9+x+y$. За умовою задачі отримаємо рівняння: $\overline{19xy}+1+9+x+y=1997$, $1900+10x+y+10+x+y=1997$, $11x+2y=87$ - це лінійне рівняння з двома змінними. Знайдемо з рівняння y: $y=\frac{87-11x}{2}$, отже $(87-11x)\,\vdots\,2$ і $87-11x>0$. Перебравши цілі непарні значення x – це 1, 3, 5, 7, знаходимо, що x=7, $y=5$. Отже, студент народився у 1975 році і йому було 22 роки.

Приклад 13. Чи можна виплатити 1000 гривень 40 купюрами вартістю 1, 10, 100 гривень?

Розв'язання. Нехай 1000 гривень можна виплатити, x купюрами по 1 гривні, y купюрами по 10 гривень, та z купюрами по 100 гривень, де $x;y;z>0$ і належать цілим числам. З умови задачі отримаємо систему рівнянь:

$\begin{cases} x+y+z=40, \\ x+10y+100z=1000; \end{cases}$ помножимо перше рівняння на -1 і додамо до другого маємо,

$9y+99z=960$, тоді ліва частина рівняння ділиться на 9, а права частина 960 не ділиться націло на 9, отже в цілих числах рівняння не має розв'язків. Тому не можна виплатити 1000 гривень 40 купюрами вартістю 1, 10, 100 гривень.

Приклад 14. Авіалінію, яка зв'язує міста А і В, обслуговують літаки трьох типів. Кожний літак першого, другого і третього типів може прийняти відповідно 230, 100 і 40 пасажирів. Усі літаки лінії можуть одночасно перевезти 760 пасажирів. Скільки літаків кожного типу обслуговують цю авіалінію?

Розв'язання. Нехай літаків першого типу була x, другого - y, третього - z, де $x,y,z \in N$. З умови за дачі отримаємо рівняння $230x+100y+40z=760$, звідки отримаємо, що $23x+10y+4z=76$. З останнього рівняння робимо висновок, що х – парне число, тоді $23x=76-(10y+4z)\le 62$ (врахували мінімальні значення $y=z=1$), звідки $x\le \frac{62}{23}=2\frac{19}{23}$, а отже, х=2. Враховуючи, що х=2, отримаємо рівняння $10y+4z=30$, $5y+2z=15$, з останньої рівності зрозуміло, що $z \vdots 5$. Крім того, $2z=15-5y$, $z=\frac{15-5y}{2}\le 5$ (врахували мінімальні значення $y=1$), а отже, $z=5$, $y=1$.

Відповідь: 2; 1; 5.

Велика теорема Ферма. Для довільного натурального значення $n\ge 3$ ***рівняння*** $x^n+y^n=z^n$ ***не має розв'язків на множині цілих чисел*** $x,y,z\in Z$ ***відмінних від нуля. Тому в цілих числах можна розв'язати тільки рівняння*** $x^2+y^2=z^2$***, цілі додатні розв'язки якого являють собою довжини катетів та гіпотенузи прямокутних трикутників з цілочисловими довжинами сторін і називаються піфагоровововими числами. Усі трійки взаємно простих піфагорових чисел можна дістати за формулами:*** $x=m^2-n^2$***,*** $y=2mn$***,*** $z=m^2+n^2$***, де*** m ***і*** n ***- цілі взаємно прості числа,*** $m>n>0$***.***

Розглянемо приклади рівнянь, що розв'язуються методом остач. Метод розгляду остач при діленні на деяке число можна використовувати лише для доведення того, що дане рівняння не має розв'язків у цілих числах. При розв'язуванні таких рівнянь часто використовують властивості конгруенцій.

Приклад 15. Розв'язати у цілих числах рівняння $x^2-7y=10$.

Розв'язання. Перетворимо рівняння $x^2+4=7y+14$, $x^2+4=7(y+2)$. З останньої рівності зрозуміло, що x^2+4 повинно ділитися на 7, бо права частина рівняння ділиться на 7, значить x^2 приділенні на 7 повинно давати 3. Розглянемо, які остачі будуть при діленні x^2 на 7: $1^2\equiv 1 \pmod 7$, $2^2\equiv 4 \pmod 7$, $3^2=9\equiv 2 \pmod 7$, $4^2=16\equiv 2 \pmod 7$, $5^2=25\equiv 4 \pmod 7$, $6^2=36\equiv 1 \pmod 7$, $7^2=49\equiv 0 \pmod 7$,

$8^2 = 64 \equiv 1 \pmod 7$, отже при діленні x^2 на 7 остачі 0, 1, 2, 4. Значить рівняння не має цілих розв'язків.

Приклад 16. Розв'язати у цілих числах рівняння $x^3 - x = 3y^2 + 1$.

Розв'язання. Перетворимо рівняння $x(x-1)(x+1) = 3y^2 + 1$. Ліва частина рівняння – це добуток трьох послідовних чисел, який ділиться на 3, отже і права частина рівняння число $3y^2+1$ повинно ділитися на 3. Але $3y^2+1$ при діленні на 3 дає остачу 1. Отже, рівняння не має цілих розв'язків.

Розглянемо приклади рівнянь, які розв'язуються іншими методами.

Приклад 20. Розв'яжіть рівняння $(2x^2 - 8x + 11)(y^2 + 2y + 8) = 21$ на множині цілих чисел.

Розв'язання. Виділимо повні квадрати у кожному множнику: $(2x^2 - 8x + 8 + 3)(y^2 + 2y + 1 + 7) = 21$, $(2(x-2)^2 + 3)((y+1)^2 + 7) = 21$. Оцінимо кожний множник: $(x-2)^2 \ge 0$, $(y+1)^2 \ge 0$, тоді $2(x-2)^2 + 3 \ge 3$ і $(y+1)^2 + 7 \ge 7$, отже, добуток двох множників дорівнюватиме 21, коли:

$$\begin{cases} 2(x-2)^2 + 3 = 3, \\ (y+1)^2 + 7 = 7; \end{cases} \begin{cases} (x-2)^2 = 0, \\ (y+1)^2 = 0; \end{cases} \begin{cases} x = 2, \\ y = -1; \end{cases}$$

Відповідь: $(2;-1)$.

Приклад 21. Розв'язати у цілих числах рівняння $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$.

Розв'язання. Серед чисел $x, y, z \ne 0$ буде хоча б одне натуральне число, бо тоді ліва частина буде від'ємною. Нехай це число x. Розглянемо такі випадки:

1) Якщо $x = 1$, то $1 + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$, $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$, $\frac{1}{y} = -\frac{1}{z}$, $y = -z = n$, де $n \in N$. Тоді, маємо наступні розв'язки: $(1;n;-n)$, $(1;-n;n)$, $(n;1;-n)$, $(n;-n;1)$, $(-n;n;1)$, $(-n;1;n)$.

2) Якщо $x = 2$, то $\frac{1}{2} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$, $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2}$, $\frac{1}{z} = \frac{1}{2} - \frac{1}{y}$, $\frac{1}{z} = \frac{y-2}{2y}$, $z = \frac{2y}{y-2} = 2 + \frac{4}{y-2}$, оскільки $z \in Z$, то можна перебрати всі значення y: якщо $y = 6$, то $z = 3$; якщо $y = 4$, то $z = 4$; якщо $y = 3$, то $z = 6$; якщо $y = 1$, то $z = -2$; якщо $y = -2$, то $z = 1$. Отже, отримали наступні розв'язки: $(2;6;3)$, $(2;4;4)$, $(2;3;6)$, $(2;1;-2)$, $(2;-2;1)$.

3) Якщо $x \ge 3$, то $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1 - \frac{1}{x} \ge 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$, тому серед чисел y і z є хоча б одне натуральне число, нехай це буде y. Випадки, коли серед чисел x, y, z були 1 чи

2, вже розглянуто, тому розглядатимемо, що $y \geq 3$. Тоді $\frac{1}{z} \geq \frac{2}{3} - \frac{1}{y} \geq \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$, отже $1 \leq z \leq 3$, а значить $z = 3$. Якщо $x \geq 3$ і $y \geq 3$, то $\frac{1}{y} + \frac{1}{x} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$, аналогічно $y = 3$. Отримали один розв'язок $(3;3;3)$.

Відповідь: $(1;n;-n)$, $(1;-n;n)$, $(n;1;-n)$, $(n;-n;1)$, $(-n;n;1)$, $(-n;1;n)$, $(2;6;3)$, $(2;4;4)$, $(2;3;6)$, $(2;1;-2)$, $(2;-2;1)$, $(3;3;3)$, $n \in N$.

Практичне заняття. Завдання для самостійного розв'язання

1. Розв'яжіть рівняння у цілих числах:

   а) $x^2 + xy - x - y = 5$; б) $xy - x - 2y = 5$; в) $9x^2 - y^2 = 6$.

2. Знайти всі прямокутники, сторони яких вимірюються цілими числами, а площа чисельно дорівнює периметру.
3. З квадратного аркуша паперу в клітинку, який містить ціле число клітинок, вирізали квадрат, у якому також виявилося ціле число клітинок. На частині аркуша, що залишилась, рівно 71 клітинки. Скільки клітинок мав аркуш паперу?
4. Знайдіть цілі розв'язки рівняння:

   а) $17x + 19y = 3$; б) $3x - 12y = 7$; в) $201x - 1999y = 12$; г) $61x + 92y = 4$.

5. Потрібно розмістити настил довжиною 90 м із залізобетонних плит. Плити є двох сортів по 30 дм і 45 дм. Скільки тих і других потрібно взяти щоб зробити настил потрібної довжини?
6. Знайти всі додатні трицифрові числа, які від ділення на 37 дають остачу 2, а від ділення на 11 дають остачу 5.
7. Скількома способами можна скласти відрізок довжиною 1 м із відрізків довжинами 7 і 12 см?
8. На складі є цвяхи в ящиках по 16, 17 і 40 кг. Чи можна взяти 140 кг цвяхів, не відкриваючи ні одного ящика?
9. Привезли 420 т вугілля у вагонах по16, 20 і 25 т. Скільки яких вагонів було використано, якщо відомо, що всього було 27 вагонів?
10. Довести, що рівняння $x^2 - 3y^2 = -1$ не має розв'язків в цілих числах.

Контрольна робота.

1. Розв'яжіть рівняння у цілих числах:

а) $x^2-4y^2=5$;   б) $x^2-xy-2y^2=7$.

2. Знайдіть цілі розв'язки рівняння: а) $37x+23y=15$; б) $64x-39y=15$.

3. Один майстер робить на довгій стрічці позначки синім олівцем через кожні 25 см, а другий – червоним через кожні 36 см, починаючи з одного й того самого місця. Чи може яка-небудь синя позначка виявитися на відстані 1 см від якої-небудь червоно?

4. Вік людини в 1977 році дорівнює сумі цифр року його народження. Скільки років людині.

5. Хімічний завод має цехи трьох типів. У кожному цеху першого, другого і третього типу працює відповідно 350, 80 і 60 робітників. Разом у цехах заводу працює 980 робітників. Знайдіть кількість цехів кожного типу.

ТЕМА 3. Ідеї та методи розв'язування нестандартних задач для учнів 8-9 класу.

Мета теми: теоретичне вивчення проблеми; розробка основних методів обчислення сум та методів доведення нерівностей.

Завдання теми:

Систематизувати знання щодо: розв'язування олімпіадних задач на сумування та доведення нерівностей через глибоку систематизацію знань програмового матеріалу.

Сформувати вміння (навички): використовувати основні методи розв'язування задач на сумування та доведення нерівностей при розв'язуванні творчих завдань.

Розвинути установки до:

- постійного знаходження нових методів та підходів до розв'язування задач на сумування та доведення нерівностей.
- самовдосконалення.

Сприяти набуттю досвіду щодо розв'язування творчих задач на сумування та доведення нерівностей.

Очікувані навчальні результати:

Знання: основних методів при розв'язуванні задач на сумування та доведення нерівностей.

Уміння: примінити основні методи розв'язування задач на сумування та доведення нерівностей в задачах олімпіадного напрямку.

Установки до: креативності та постійного творення власної методики розв'язування олімпіадних задач на сумування та доведення нерівностей.

Набуття досвіду: створення власної методики для розв'язування задач сумування та доведення нерівностей.

Доведення нерівностей. Лекційно практичний матеріал.

Розглянемо приклад доведення нерівностей в яких виділяють повний квадрат.

Приклад 1. Доведіть, що $x^2+5y^2+4xy-4y+4\geq 0$ при всіх дійсних значеннях x і y.

Розв'язання. Виділимо в лівій частині нерівності повні квадрати, маємо:

$$(x^2+4xy+4y^2)+(y^2-4y+4)\geq 0,$$

$$(x+2y)^2+(y-2)^2\geq 0,$$

зрозуміло, що $(x+2y)^2\geq 0, (y-2)^2\geq 0$, а значить $(x+2y)^2+(y-2)^2\geq 0$. Отже, при всіх дійсних значеннях x і y $x^2+5y^2+4xy-4y+4\geq 0$.

Розглянемо приклади доведення нерівностей в яких використовується метод різниці, який полягає у розгляданні лівої і правої частини (якщо різниця додатна, то ліва частина більша за праву).

Приклад 2. Довести нерівність $x^3+y^3\geq xy(x+y)$, якщо $x\geq 0$, $y\geq 0$.

Розв'язання. Розглянемо різницю лівої і правої частин нерівності:

$$x^3+y^3-x^2y-xy^2=x^2(x-y)-y^2(x-y)=(x-y)(x^2-y^2)=$$

$$=(x-y)(x-y)(x+y)=(x+y)(x-y)^2,$$

за умовою $x\geq 0$, $y\geq 0$, тому $x+y\geq 0$, $(x-y)^2\geq 0$, значить $(x+y)(x-y)^2\geq 0$. Отже, $x^3+y^3\geq xy(x+y)$.

Назвемо нерівність $x^3+y^3\geq xy(x+y)$, якщо $x\geq 0$, $y\geq 0$ нерівність двох кубів, а нерівність виду $x^3+y^3+z^3\geq 3xyz$ нерівність трьох кубів, якщо $x\geq 0$, $y\geq 0$, $z\geq 0$. Рівність має місце якщо $x=y=z$.

Приклад 3. Довести нерівність $a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ac$ при будь-яких значеннях a,b,c.

Розв'язання. Помножимо ліву і праву частину нерівності на 2, маємо $2a^2+2b^2+2c^2\geq 2ab+2bc+2ac$.

Розглянемо різницю лівої і правої частин нерівності:

$$2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ac=(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(c^2-2ac+a^2)=$$

$$=(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\geq 0,\text{ оскільки }(a-b)^2\geq 0,\ (b-c)^2\geq 0,\ (c-a)^2\geq 0.$$

Отже, $a^2+b^2+c^2 \ge ab+bc+ac$.

Надалі нерівність $a^2+b^2+c^2 \ge ab+bc+ac$ будемо називати оцінка квадратів трьох чисел, а нерівність виду $a^2+b^2 \ge 2ab$ нерівність двох квадратів. Рівність має місце якщо $a=b=c$.

Приклад 4. Дійсні числа x і y задовольняють умову $x+y=4$. Доведіть, що $x^2+y^2 \ge 8$.

Розв'язання. Піднесемо ліву і праву частину рівності $x+y=4$ до квадрату, маємо: $x^2+2xy+y^2=16$. Використаємо відому нерівність, що $x^2+y^2 \ge 2xy$, тоді $x^2+y^2+x^2+y^2 \ge x^2+2xy+y^2$, $2(x^2+y^2) \ge 16$, отже $x^2+y^2 \ge 8$.

Приклад 5. Довести, що при $a \ge 0$, $в \ge 0$ і $c \ge 0$ виконується нерівність

$$ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a) \ge 6abc.$$

Розв'язання. Розкриємо дужки: $a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2 \ge 6abc$, тоді згрупувавши, маємо

$$c(a^2+b^2)+a(b^2+c^2)+b(a^2+c^2) \ge 6abc.$$

Використаємо відому нерівність, що $x^2+y^2 \ge 2xy$, маємо:

$$c(a^2+b^2) \ge 2abc,\ a(b^2+c^2) \ge 2abc, b(a^2+c^2) \ge 2abc\ .$$

Додамо останні три нерівності $c(a^2+b^2)+a(b^2+c^2)+b(a^2+c^2) \ge 6abc$, отже

$ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a) \ge 6abc.$

Приклад 6. Довести, що при $a \ge 0$, $в \ge 0$ і $c \ge 0$ виконується нерівність

$$ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a) \le 2(a^3+b^3+c^3).$$

Розв'язання. Використаємо відому нерівність, що $x^3+y^3 \ge xy(x+y)$, якщо $x \ge 0$, $y \ge 0$. Тоді застосувавши її тричі маємо: $a^3+b^3 \ge ab(a+b)$, $a^3+c^3 \ge ac(a+c)$, $c^3+b^3 \ge bc(c+b)$. Додамо всі три нерівності, маємо: $ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a) \le 2(a^3+b^3+c^3)$.

Приклад 7. Довести, що при $a>0$, $в>0$ і $c>0$ виконується нерівність $\frac{2a}{b+c}+\frac{2b}{c+a}+\frac{2c}{a+b} \ge 3$.

Розв'язання. Помножимо ліву і праву частину нерівності на $(b+c)(c+a)(a+b)$, маємо:

$$2a(c+a)(a+b)+2b(b+c)(a+b)+2c(b+c)(c+a) \ge 3(b+c)(c+a)(a+b),$$

$$2a(ca+bc+a^2+ab)+2b(ba+b^2+ca+cb)+2c(bc+ba+c^2+ca)\geq$$

$$\geq 3(bc+ba+c^2+ca)(a+b),$$

$$2ca^2+2abc+2a^3+2ba^2+2ab^2+2b^3+2abc+2cb^2+2bc^2+2abc+2c^3+2ac^2\geq$$

$$\geq 3(abc+ba^2+ac^2+ca^2+cb^2+ab^2+bc^2+abc),$$

$$2ca^2+6abc+2a^3+2ba^2+2ab^2+2b^3+2cb^2+2bc^2+2c^3+2ac^2\geq$$

$$\geq 6abc+3(ba^2+ac^2+ca^2+cb^2+ab^2+bc^2),$$

$2a^3+2b^3+2c^3\geq ba^2+ac^2+ca^2+cb^2+ab^2+bc^2$, тоді

$ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)\leq 2(a^3+b^3+c^3)$, таку нерівність доводили в попередньому завданні.

Приклад 8. Доведіть нерівність $\left(\frac{a}{b}\right)^4+\left(\frac{b}{c}\right)^4+\left(\frac{c}{a}\right)^4\geq\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}$ при будь-яких значеннях a,b,c.

Розв’язання. Маємо:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^4+\left(\frac{b}{c}\right)^4+\left(\frac{c}{a}\right)^4=\left((\frac{a}{b})^2\right)^2+\left((\frac{b}{c})^2\right)^2+\left((\frac{c}{a})^2\right)^2\geq\left(\frac{a}{b}\right)^2\cdot\left(\frac{b}{c}\right)^2+\left(\frac{a}{b}\right)^2\cdot\left(\frac{c}{a}\right)^2+\left(\frac{b}{c}\right)^2\cdot\left(\frac{c}{a}\right)^2=$$

$$=\left(\frac{a}{c}\right)^2+\left(\frac{c}{b}\right)^2+\left(\frac{b}{a}\right)^2\geq\frac{a}{c}\cdot\frac{c}{b}+\frac{c}{b}\cdot\frac{b}{a}+\frac{a}{c}\cdot\frac{b}{a}=\frac{a}{b}+\frac{c}{a}+\frac{b}{c}$$, що і треба було довести.

Розглянемо нерівність Коші: середнє арифметичне кількох невід’ємних чисел не менше від їхнього середнього геометричного, тобто $\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}\geq\sqrt[n]{a_1a_2...a_n}$***. Рівність досягається тільки тоді, коли всі числа рівні між собою. Нерівність Коші для двох чисел: при будь-яких невід’ємних*** a ***і*** b ***виконується нерівність*** $\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$***.***

Приклад 9. Довести нерівність $(a+b)(a+c)(b+c)\geq 8abc$, якщо $a\geq 0$, $b\geq 0$, $c\geq 0$.

Розв’язання. Запишемо нерівність Коші для трьох пар чисел, при умові $a\geq 0$, $b\geq 0$, $c\geq 0$, маємо:

$$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab},\ \frac{a+c}{2}\geq\sqrt{ac},\ \frac{b+c}{2}\geq\sqrt{bc}\ .$$

Використаємо властивість числових нерівностей перемножимо останні три, маємо:

$$\frac{(a+b)(a+c)(b+c)}{8} \geq \sqrt{a^2b^2c^2}\text{, тоді } (a+b)(a+c)(b+c) \geq 8abc.$$

Приклад 10. Знайдіть найбільше значення виразу xy, якщо $x>0$, $y>0$ і $3x+y=10$.

Розв'язання. Застосуємо нерівність Коші для пари чисел $3x$ і y при умові , $x>0$, $y>0$ маємо:

$\frac{3x+y}{2} \geq \sqrt{3xy}$, тоді $\frac{10}{2} \geq \sqrt{3xy}$, $\sqrt{3xy} \leq 5$, $3xy \leq 25$, $xy \leq \frac{25}{3}$. З останньої нерівності можна зробити висновок, що найбільше значення виразу xy буде дорівнювати $\frac{25}{3}$, якщо існують такі значення x і y.

У записаній нерівності Коші рівність досягається якщо $3x=y$, тоді отримаємо систему рівнянь:

$\begin{cases} y=3x, \\ 3x+y=10; \end{cases}$ тоді $6x=10$, $x=\frac{5}{3}$, а $y=5$. Отже, найбільше значення виразу $xy=\frac{25}{3}$.

Приклад 11. Знайдіть найбільше значення виразу $\frac{x^2}{25+x^4}$.

Розв'язання. Запишемо дріб $\frac{x^2}{25+x^4}$ щоб чисельником було число, тобто $\frac{1}{\frac{25+x^4}{x^2}}$.

Найбільше значення виразу буде тоді коли $\frac{25+x^4}{x^2}=x^2+\frac{25}{x^2}$ буде набирати найменшого значення. Застосуємо нерівність Коші до пари чисел x^2 і $\frac{25}{x^2}$, маємо: $\frac{x^2+\frac{25}{x^2}}{2} \geq \sqrt{x^2 \cdot \frac{25}{x^2}}$, тоді $x^2+\frac{25}{x^2} \geq 10$. З останньої нерівності можна зробити висновок, що найменше значення виразу $x^2+\frac{25}{x^2}$ буде 10 , якщо існують такі значення x і y. У записаній нерівності Коші рівність досягається якщо $x^2=\frac{25}{x^2}$, тобто при $x=\pm\sqrt{5}$. Отже, $\frac{x^2}{25+x^4} \leq \frac{1}{10}$ і найбільше значення виразу $\frac{x^2}{25+x^4}=\frac{1}{10}$.

Розглянемо середні величини:

1) $A_n = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}$ ***- середнє арифметичне, де*** $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ***- будь-які числа, тоді середнє арифметичне для двох чисел -*** $\frac{a+b}{2}$.

2) $B_n = \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n}$ ***- середнє геометричне, де*** $a_1 \geq 0, a_2 \geq 0, \ldots, a_n \geq 0$***, тоді середнє геометричне для двох чисел -*** $\sqrt{ab}$.

3) $C_n = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}}$ ***- середнє гармонійне, а для двох чисел -*** $\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \frac{2ab}{a+b}$ ***при умові, що знаменники не дорівнюють нулю.***

4) $D_n = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2}{n}}$ ***- середнє квадратичне, де*** $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ***- будь-які числа, тоді середнє квадратичне для двох чисел*** $\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$.

Загальне співвідношення між середніми $D_n \geq A_n \geq B_n \geq C_n$***, причому рівність досягається при*** $a_1 = a_2 = ... = a_n$***, а для двох чисел справедливий такий ланцюжок нерівностей*** $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$***, де*** $a > 0$ ***і*** $b > 0$.

Приклад 12. Доведіть, що коли $a > 0$ і $b > 0$, то $(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 4$.

Розв'язання. Використаємо двічі відому нерівність Коші:

1) $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, то $a + b \geq 2\sqrt{ab}$.

2) $\frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{2} \geq \sqrt{\frac{1}{ab}}$, то $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq 2\sqrt{\frac{1}{ab}}$.

Використовуючи властивості числових нерівностей помножимо останні дві, маємо:

$$(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 4 \cdot \sqrt{ab} \cdot \sqrt{\frac{1}{ab}} \text{, тоді}$$

$$(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 4.$$

Приклад 13. Доведіть нерівність $\sqrt{x^2+(2013-y)^2}+\sqrt{(2013-x)^2+y^2}\geq\sqrt{2}\cdot 2013$.

Розв'язання. Використаємо двічі відому нерівність, що $\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}\geq\dfrac{a+b}{2}$.

1) $\sqrt{\dfrac{x^2+(2013-y)^2}{2}}\geq\dfrac{x+2013-y}{2}$, тоді $\sqrt{x^2+(2013-y)^2}\geq\sqrt{2}\cdot\dfrac{x+2013-y}{2}$.

2) $\sqrt{\dfrac{(2013-x)^2+y^2}{2}}\geq\dfrac{2013-x+y}{2}$, тоді $\sqrt{(2013-x)^2+y^2}\geq\sqrt{2}\cdot\dfrac{2013-x+y}{2}$.

Використовуючи властивості числових нерівностей додамо останні дві, маємо:

$$\sqrt{x^2+(2013-y)^2}+\sqrt{(2013-x)^2+y^2}\geq\sqrt{2}\cdot\left(\frac{x+2013-y}{2}+\frac{2013-x+y}{2}\right),$$

$$\sqrt{x^2+(2013-y)^2}+\sqrt{(2013-x)^2+y^2}\geq\sqrt{2}\cdot\frac{4026}{2}, \text{ остаточно}$$

$$\sqrt{x^2+(2013-y)^2}+\sqrt{(2013-x)^2+y^2}\geq\sqrt{2}\cdot 2013.$$

Потрібно знати такі правила:

1) Якщо сума додатних чисел постійна, то їхній добуток буде найбільшим, коли числа рівні між собою.

2) Якщо добуток додатних чисел постійний, то їхня сума буде найменшою, коли числа рівні між собою.

Приклад 14. Знайти найменше значення виразу $\dfrac{x^4+x^2+4}{x^2+1}$.

Розв'язання. Виконаємо перетворення $\dfrac{x^4+x^2+4}{x^2+1}=\dfrac{x^2(x^2+1)+4}{x^2+1}=x^2+\dfrac{4}{x^2+1}=x^2+1+\dfrac{4}{x^2+1}-1$. Оскільки при будь-якому значенні x добуток виразів x^2+1 і $\dfrac{4}{x^2+1}$ завжди дорівнює 4, то найменше значення виразу $x^2+1+\dfrac{4}{x^2+1}$ досягається коли $x^2+1=\dfrac{4}{x^2+1}$, тоді $(x^2+1)^2=4$, $x^2+1=2$, а значить $\dfrac{x^4+x^2+4}{x^2+1}=x^2+1+\dfrac{4}{x^2+1}-1=2+\dfrac{2}{2}-1=3$.

Відповідь: 3.

Приклад 15. Знайти найбільше значення виразу $x(5-x)$, якщо $0<x<5$.

Розв'язання. Якщо $0 < x < 5$, то вирази x і $5-x$ - додатні, а їхня сума є сталим числом 5, а значить найбільше значення виразу буде коли $x = (5-x)$, тоді $x = 2{,}5$. Отже, найбільше значення виразу $x(5-x) = 2{,}5 \cdot 2{,}5 = 6{,}25$.

Відповідь: 6,25.

Відомі також нерівності оцінки суми двох взаємно обернених чисел:

1) Сума двох взаємно обернених від'ємних чисел a і b не більша за -2, тобто $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \le -2$.

2) Сума двох взаємно обернених додатних чисел a і b не менша за 2, тобто $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \ge 2$.

Приклад 16. Довести, що $(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \ge 9$, якщо $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$.

Розв'язання. Розкриємо дужки в лівій частині нерівності, маємо:

$$1 + \frac{a}{b} + \frac{a}{c} + \frac{b}{a} + 1 + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{c}{b} + 1 \ge 9,$$

$$(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}) + (\frac{b}{c} + \frac{c}{b}) + (\frac{a}{c} + \frac{c}{a}) \ge 6.$$

Використаємо відомі нерівності, що $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \ge 2$, $\frac{b}{c} + \frac{c}{b} \ge 2$, $\frac{a}{c} + \frac{c}{a} \ge 2$, якщо $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$. Використаємо властивості числових нерівностей додамо останні три, маємо:

$(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}) + (\frac{b}{c} + \frac{c}{b}) + (\frac{a}{c} + \frac{c}{a}) \ge 6$, отже $(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \ge 9$.

Запишемо відомі нерівності з модулями:

1) Модуль суми не перевищує суми модулів доданків, тобто: $|a_1 + a_2 + \ldots + a_n| \le |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n|$, а для двох чисел $|a+b| \le |a| + |b|$.

2) $\big||a| - |b|\big| \le |a \pm b| \le |a| + |b|$.

Приклад 17. Для довільного дійсного x доведіть нерівність $|x-1| + |x-5| \ge 4$. Знайдіть значення x, при яких виконується рівність.

Розв’язання. Використаємо відому нерівність для двох чисел, що $|a+b| \le |a|+|b|$ та властивість модулів $|-x|=|x|$. Тоді маємо: $|x-1|+|x-5|=|x-1|+|5-x| \ge |x-1+5-x|=|4|=4$. Рівність досягається, якщо $x \in [1;5]$.

Нерівність Коші-Буняковського: для будь-яких дійсних чисел $a_1, a_2, ..., a_n$ і $b_1, b_2, ..., b_n$ виконується нерівність $(a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n)^2 \le (a_1^2+a_2^2+...+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+...+b_n^2)$. Рівність досягається тоді і тільки тоді, коли числа a_m і b_m пропорційні (якщо ці числа не дорівнюють нулю, то це значить, що $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=...=\frac{a_n}{b_n}$, а якщо якісь із цих чисел дорівнюють нулю, то пропорційність означає, що існує таке число $\lambda \ne 0$, що $a_1=\lambda b_1$, $a_2=\lambda b_2$, …, $a_n=\lambda b_n$. Нерівність Коші-Буняковського для двох наборів чисел $(a_1;a_2)$ і $(b_1;b_2)$ буде $(a_1b_1+a_2b_2)^2 \le (a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)$.

Приклад 18. Довести, що $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \ge 9$, якщо $a>0$, $b>0$, $c>0$.

Розв’язання. Розглянемо два набори чисел $(\sqrt{a};\sqrt{b};\sqrt{c})$ і $\left(\sqrt{\frac{1}{a}};\sqrt{\frac{1}{b}};\sqrt{\frac{1}{c}}\right)$ та застосуємо нерівність Коші-Буняковського:

$$\left((\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2+(\sqrt{c})^2\right)\cdot\left(\left(\sqrt{\frac{1}{a}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{1}{b}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{1}{c}}\right)^2\right) \ge \left(\sqrt{a}\cdot\sqrt{\frac{1}{a}}+\sqrt{b}\cdot\sqrt{\frac{1}{b}}+\sqrt{c}\cdot\sqrt{\frac{1}{c}}\right)^2,$$

отже, $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \ge 9$.

Приклад 19. Знайдіть найбільше і найменше значення виразу $3x+4y$, якщо $x^2+y^2=25$.

Розв’язання. Розглянемо два набори чисел $(x;y)$ і $(3;4)$ та застосуємо нерівність Коші-Буняковського: $(3x+4y)^2 \le (x^2+y^2)(3^2+4^2)$. Використовуючи, що $x^2+y^2=25$, маємо $(3x+4y)^2 \le 25\cdot 25$, $(3x+4y)^2 \le 625$, значить $-25 \le 33x+4y \le 25$. Отже, найбільше значення виразу $3x+4y$ дорівнює 25, а найменше -25.

Приклад 20. Знайдіть найбільше значення виразу $3x-y+z$, якщо $x^2+y^2+z^2=44$.

Розв’язання. Розглянемо два набори чисел $(x;y;z)$ і $(3;-1;1)$ та застосуємо нерівність Коші-Буняковського, маємо: $(3x-y+z)^2 \le (x^2+y^2+z^2)(9+1+1)=44\cdot 11=22^2$, тоді $|3x-y+z| \le 22$. Найбільше значення виразу $3x-y+z$ дорівнює 22.

Приклад 21. Довести нерівність $\sqrt{6a+1}+\sqrt{6b+1}+\sqrt{6c+1}\le 9$ при умові, що $a+b+c=2$.

Розв'язання. ***1 спосіб.*** Розглянемо два набори чисел $\left(\sqrt{6a+1};\sqrt{6b+1};\sqrt{6c+1}\right)$ і $(1;1;1)$ та застосуємо нерівність Коші-Буняковського, маємо:

$$\left(1\cdot\sqrt{6a+1}+1\cdot\sqrt{6b+1}+1\cdot\sqrt{6c+1}\right)^2\le\left(\left(\sqrt{6a+1}\right)^2+\left(\sqrt{6b+1}\right)^2+\left(\sqrt{6c+1}\right)^2\right)\left(1^2+1^2+1^2\right),$$

$$\left(\sqrt{6a+1}+\sqrt{6b+1}+\sqrt{6c+1}\right)^2\le\left(6a+1+6b+1+6c+1\right)\cdot 3,$$

$$\left(\sqrt{6a+1}+\sqrt{6b+1}+\sqrt{6c+1}\right)^2\le\left(6(a+b+c)+3\right)\cdot 3,$$

$$\left(\sqrt{6a+1}+\sqrt{6b+1}+\sqrt{6c+1}\right)^2\le\left(6\cdot 2+3\right)\cdot 3,$$

$$\left(\sqrt{6a+1}+\sqrt{6b+1}+\sqrt{6c+1}\right)^2\le 45,$$

$$\sqrt{6a+1}+\sqrt{6b+1}+\sqrt{6c+1}\le\sqrt{45},\ \text{значить}$$

$$\sqrt{6a+1}+\sqrt{6b+1}+\sqrt{6c+1}\le 9.$$

2 спосіб. Нехай $\sqrt{6a+1}=x$, $\sqrt{6b+1}=y$, $\sqrt{6c+1}=z$. Тоді $6a+1=x^2$, $6b+1=y^2$, $6c+1=z^2$, додавши останні три рівності маємо: $x^2+y^2+z^2=6(a+b+c)+3$, $x^2+y^2+z^2=6\cdot 2+3$, $x^2+y^2+z^2=15$. Використаємо відому нерівність трьох квадратів $xy+xz+yz\le x^2+y^2+z^2$, запишемо її так:

$$x^2+y^2+z^2+2(xy+xz+yz)\le 3(x^2+y^2+z^2),\ \text{тоді}$$

$$(x+y+z)^2\le 3\cdot 15=45,$$

$$\left(\sqrt{6a+1}+\sqrt{6b+1}+\sqrt{6c+1}\right)^2\le 45,$$

$$\sqrt{6a+1}+\sqrt{6b+1}+\sqrt{6c+1}\le\sqrt{45},\ \text{значить}$$

$$\sqrt{6a+1}+\sqrt{6b+1}+\sqrt{6c+1}\le 9.$$

3 спосіб. Використаємо нерівність Коші для пар чисел $(1;6a+1)$, $(1;6b+1)$, $(1;6c+1)$, маємо:

$\dfrac{1+6a+1}{2}\ge 1\cdot\sqrt{6a+1}$, $\dfrac{1+6b+1}{2}\ge 1\cdot\sqrt{6b+1}$, $\dfrac{1+6c+1}{2}\ge 1\cdot\sqrt{6c+1}$. Додамо отримані нерівності, маємо:

$$\frac{2+6a}{2}+\frac{2+6b}{2}+\frac{2+6c}{2}\ge\sqrt{6a+1}+\sqrt{6b+1}+\sqrt{6c+1},$$

$$\sqrt{6a+1}+\sqrt{6b+1}+\sqrt{6c+1}\le 3+3(a+b+c),$$

$$\sqrt{6a+1}+\sqrt{6b+1}+\sqrt{6c+1}\le 3+3\cdot 2,$$

$$\sqrt{6a+1}+\sqrt{6b+1}+\sqrt{6c+1}\le 9.$$

Розглянемо ключові нерівності за допомогою яких можна розв'язати ряд нерівностей.

1) $\frac{a^2}{b}\ge 2a-b$***, де*** $b>0$***;*** $\frac{a^3}{b^2}\ge 3a-2b$***, де*** $a>0$***,*** $b>0$***. Загальний запис такого виду нерівностей*** $\frac{a^{n+1}}{b^n}\ge (n+1)a-nb$***, де*** $a>0$***,*** $b>0$ ***і*** $n\in N$***.***

2) $\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}\ge\frac{(a+b)^2}{x+y}$***, де*** $x>0$***,*** $y>0$***;*** $\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z}\ge\frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$***, де*** $x>0$***,*** $y>0$***,*** $z>0$***.***
Загальний запис такого виду нерівностей $\frac{a_1^2}{x_1}+\frac{a_2^2}{x_2}+\ldots+\frac{a_n^2}{x_n}\ge\frac{(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2}{x_1+x_2+\ldots+x_n}$***.***

Приклад 22. Довести, що коли $a>0$, $b>0$, $c>0$, то $\frac{a^2}{b}+\frac{b^3}{c^2}+\frac{c^4}{a^3}\ge 2(b+c)-a$.

Застосуємо відому нерівність для кожного доданка, що $\frac{a^{n+1}}{b^n}\ge (n+1)a-nb$, де $a>0$, $b>0$ і $n\in N$, маємо: $\frac{a^2}{b}\ge 2a-b$, $\frac{b^3}{c^2}\ge 3b-2c$, $\frac{c^4}{a^3}\ge 4c-3a$. Додамо нерівності, маємо:

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^3}{c^2}+\frac{c^4}{a^3}\ge 2a-b+3b-2c+4c-3a,$$

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^3}{c^2}+\frac{c^4}{a^3}\ge 2(b+c)-a.$$

Приклад 23. Відомо, що $a>0$, $b>0$, $c>0$. Доведіть нерівність $\frac{2}{a+b}+\frac{2}{b+c}+\frac{2}{a+c}\ge\frac{9}{a+b+c}$.

Розв'язання. $\frac{2}{a+b}+\frac{2}{b+c}+\frac{2}{a+c}=2\cdot\left(\frac{1^2}{a+b}+\frac{1^2}{b+c}+\frac{1^2}{a+c}\right)\ge 2\cdot\frac{(1+1+1)^2}{a+b+b+c+a+c}=\frac{9}{a+b+c}$,

тобто застосували ключову нерівність, що $\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z}\ge\frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$, де $x>0$, $y>0$, $z>0$.

Приклад 24. Відомо, що $a>0$, $b>0$, $c>0$. Доведіть нерівність $\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{a+c}+\frac{c^2}{a+b}\ge\frac{1}{2}(a+b+c)$.

Розв'язання. ***1 спосіб.*** Застосуємо ключову нерівність, що $\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z}\ge\frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$, де $x>0$, $y>0$, $z>0$, маємо:

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{a+c}+\frac{c^2}{a+b}\ge\frac{(a+b+c)^2}{b+c+a+c+a+b}=$$
$$=\frac{(a+b+c)^2}{2(a+b+c)}=\frac{1}{2}(a+b+c)$$

2 спосіб. Використаємо тричі відому нерівність, що $\frac{a^2}{b}\ge 2a-b$, маємо:

$$\frac{a^2}{b+c}\ge 2a-(b+c)=2a-b-c,$$

$$\frac{b^2}{a+c}\ge 2b-(a+c)=2b-a-c,$$

$$\frac{c^2}{a+b}\ge 2c-(a+b)=2c-a-b.$$

Додамо отримані нерівності, маємо:

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{a+c}+\frac{c^2}{a+b}\ge 2a-b-c+2b-a-c+2c-a-b=0,$$

таким чином початкову нерівність не довели, зробимо так:

$$\frac{a^2}{b+c}=\frac{1}{4}\cdot\frac{(2a)^2}{b+c}\ge\frac{1}{4}\cdot(4a-b-c),$$

$$\frac{b^2}{a+c}=\frac{1}{4}\cdot\frac{(2b)^2}{a+c}\ge\frac{1}{4}\cdot(4b-a-c),$$

$\frac{c^2}{a+b}=\frac{1}{4}\cdot\frac{(2c)^2}{a+b}\ge\frac{1}{4}\cdot(4c-a-b)$, додамо останні три нерівності, маємо:

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{a+c}+\frac{c^2}{a+b}\ge\frac{1}{4}(4a-b-c+4b-a-c+4c-a-b),\text{ отже}$$

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{a+c}+\frac{c^2}{a+b}\ge\frac{1}{2}(a+b+c).$$

3 спосіб. Розглянемо два набори чисел $\left(\sqrt{b+c};\sqrt{a+c};\sqrt{a+b}\right)$ і $\left(\frac{a}{\sqrt{b+c}};\frac{b}{\sqrt{a+c}};\frac{c}{\sqrt{a+b}}\right)$ та застосуємо нерівність Коші-Буняковського:

$$\left(\left(\sqrt{b+c}\right)^2+\left(\sqrt{a+c}\right)^2+\left(\sqrt{a+b}\right)^2\right)\cdot\left(\left(\frac{a}{\sqrt{b+c}}\right)^2+\left(\frac{b}{\sqrt{a+c}}\right)^2+\left(\frac{c}{\sqrt{a+b}}\right)^2\right)\geq$$

$$\left(\sqrt{b+c}\cdot\frac{a}{\sqrt{b+c}}+\sqrt{a+c}\cdot\frac{b}{\sqrt{a+c}}+\sqrt{a+b}\cdot\frac{c}{\sqrt{a+b}}\right)^2,\text{ тоді}$$

$$\left(b+c+a+c+a+b\right)\cdot\left(\left(\frac{a^2}{b+c}\right)+\left(\frac{b^2}{a+c}\right)+\left(\frac{c^2}{a+b}\right)\right)\geq\left(a+b+c\right)^2,$$

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{a+c}+\frac{c^2}{a+b}\geq\frac{\left(a+b+c\right)^2}{2x+2y+2z},\text{ отже}$$

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{a+c}+\frac{c^2}{a+b}\geq\frac{1}{2}\left(a+b+c\right).$$

Приклад 25. Відомо, що $a>0$, $b>0$, $c>0$. Доведіть нерівність $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\leq\frac{a^8+b^8+c^8}{a^3b^3c^3}$.

Розв'язання. Помножимо праву і ліву частину нерівності на вираз $a^3b^3c^3$, маємо:

$$a^8+b^8+c^8\geq a^2b^3c^3+a^3b^2c^3+a^3b^3c^2.$$

Поділимо нерівність на $a^2b^2c^2$, маємо: $\frac{a^6}{b^2c^2}+\frac{b^6}{a^2c^2}+\frac{c^6}{a^2b^2}\geq ab+ac+bc$. Застосуємо відому нерівність до кожного доданку останньої нерівності, що $\frac{a^3}{b^2}\geq 3a-2b$, де $a>0$, $b>0$, маємо:

$\frac{a^6}{b^2c^2}=\frac{\left(a^2\right)^3}{\left(bc\right)^2}\geq 3a^2-2bc$, $\frac{b^6}{a^2c^2}=\frac{\left(b^2\right)^3}{\left(ac\right)^2}\geq 3b^2-2ac$, $\frac{c^6}{a^2b^2}=\frac{\left(c^2\right)^3}{\left(ab\right)^2}\geq 3c^2-2ab$. Додамо отримані нерівності : $\frac{a^6}{b^2c^2}+\frac{b^6}{a^2c^2}+\frac{c^6}{a^2b^2}\geq 3\left(a^2+b^2+c^2\right)-2ab-2ac-2bc$, тоді

$$3\left(a^2+b^2+c^2\right)-2ab-2ac-2bc=2\left(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc\right)+a^2+b^2+c^2.$$

Застосуємо ключову нерівність, що $a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ac$ або $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac\geq 0$, маємо:

$$\begin{aligned}&3\left(a^2+b^2+c^2\right)-2ab-2ac-2bc=\\&=2\left(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc\right)+a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ac\end{aligned},\text{ отже}$$

$$\frac{a^6}{b^2c^2}+\frac{b^6}{a^2c^2}+\frac{c^6}{a^2b^2}\ge ab+ac+bc, \text{ а значить}$$

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\le\frac{a^8+b^8+c^8}{a^3b^3c^3}.$$

Розглянемо приклади доведення нерівностей в яких використовуються метод математичної індукції.

Приклад 26. Доведіть, що $2^n>2n+1$, якщо $n\ge 3$, при будь-якому $n\in N$.

Розв'язання

Використаємо метод математичної індукції.

1. При n=3 нерівність виконується:
$$2^3>2\cdot 3+1,$$
$$8>7.$$

2. Припускаємо, що задана нерівність справедлива при n=k, де $k\ge 3$, тобто:
$2^k>2k+1\Rightarrow 2^k-2k-1>0$. (1)
3. Доведемо, що задана нерівність виконується при n=k+1, тобто:
$$2^{k+1}>2(k+1)+1.$$

Розглянемо різницю $2^{k+1}-2(k+1)-1=2^k\cdot 2-2k-3=2(2^k-2k-1)+2k-1>0$ (оскільки вираз у дужках за нерівністю (1) додатний і при $k\ge 3$ вираз $2k-1$ теж додатний), що потрібно було довести.

Розглянемо приклади доведення нерівностей в яких використовуються різні методи.

Приклад 27. Доведіть нерівність $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{99}{100}<\frac{1}{10}$.

Розв'язання. Скористаємося відомим твердженням, що $\frac{a}{b}<\frac{a+m}{b+m}$, де $m>0$ і $b>a>0$, маємо: $\frac{1}{2}<\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}<\frac{4}{5}$, $\frac{5}{6}<\frac{6}{7}$, …, $\frac{99}{100}<\frac{100}{101}$. Перемноживши ці нерівності, дістанемо $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{99}{100}<\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\ldots\cdot\frac{100}{101}$. Помножимо ліву і праву частину останньої нерівності на $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{99}{100}>0$, маємо:

$$\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{99}{100}\right)^2<\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{6}{7}\cdot\ldots\frac{99}{100}\cdot\frac{100}{101},$$

$$\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{99}{100}\right)^2<\frac{1}{101},$$

$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{99}{100}<\frac{1}{\sqrt{101}}<\frac{1}{\sqrt{100}}<\frac{1}{10}$, що й потрібно було довести.

Приклад 28. Довести нерівність $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{2012^2}<1$.

Розв'язання. Порівняємо наступні дроби: $\frac{1}{2^2}<\frac{1}{1\cdot 2}$, $\frac{1}{3^2}<\frac{1}{2\cdot 3}$, $\frac{1}{4^2}<\frac{1}{3\cdot 4}$, …, $\frac{1}{2012^2}<\frac{1}{2011\cdot 2012}$. Додамо нерівності, маємо: $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{2012^2}<\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{2011\cdot 2012}$,

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{2012^2}<\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2011}-\frac{1}{2012}\right),$$

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{2012^2}<1-\frac{1}{2012}, \text{ отже}$$

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{2012^2}<1.$$

Приклад 29. Доведіть, що для будь-якого $n\in N$, $n\geq 2$ виконується нерівність $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}>\frac{1}{2}$.

Розв'язання. Порівняємо наступні дроби: $\frac{1}{n+1}>\frac{1}{n+n}=\frac{1}{2n}$, $\frac{1}{n+2}>\frac{1}{n+n}=\frac{1}{2n}$, …, $\frac{1}{2n}=\frac{1}{n+n}=\frac{1}{2n}$. Додамо нерівності, маємо: $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}>\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\ldots+\frac{1}{2n}=\frac{n}{2n}=\frac{1}{2}$, що й потрібно було довести.

Приклад 30. Довести нерівність $\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\ldots+\frac{1}{2013^2}<\frac{1}{4}$.

Розв'язання. Загальний член суми має вигляд $\frac{1}{(2n+1)^2}$. Перетворимо його

$$\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{1}{4n^2+4n+1}<\frac{1}{4n^2+4n}, \text{ тоді}$$

$$\frac{1}{(2n+1)^2}<\frac{1}{4n(n+1)},$$

$$\frac{1}{(2n+1)^2}<\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right).$$

Порівняємо кожний доданок початково нерівності використовуючи нерівність $\frac{1}{(2n+1)^2} < \frac{1}{4}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$, маємо: $\frac{1}{3^2} < \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right)$, $\frac{1}{5^2} < \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)$, $\frac{1}{7^2} < \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)$, …, $\frac{1}{2013^2} < \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1006} - \frac{1}{1007}\right)$. Додамо всі нерівності:

$$\frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \ldots + \frac{1}{2013^2} < \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1006} - \frac{1}{1007}\right),$$

$$\frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \ldots + \frac{1}{2013^2} < \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + + \ldots + \frac{1}{1006} - \frac{1}{1007}\right),$$

$$\frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \ldots + \frac{1}{2013^2} < \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{1007}\right), \text{ отже}$$

$$\frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \ldots + \frac{1}{2013^2} < \frac{1}{4}.$$

Приклад 31. Доведіть, що коли $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, то $\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} > 1$.

Розв’язання. Порівняємо наступні дроби: $\frac{a}{a+b} > \frac{a}{a+b+c}$, $\frac{b}{b+c} > \frac{b}{a+b+c}$, $\frac{c}{a+c} > \frac{c}{a+b+c}$. Додамо отримані три нерівності:

$$\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} > \frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{a+b+c} + \frac{c}{a+b+c},$$

$$\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} > \frac{a+b+c}{a+b+c},$$

$$\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} > 1.$$

Приклад 32. Доведіть, що коли $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, то $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$.

Розв’язання. Введемо заміну: $b + c = 2x$, $a + c = 2y$, $b + a = 2z$. Додамо рівності:

$$b + c + a + c + b + a = 2x + 2y + 2z,$$

$$a + b + c = x + y + z, \text{ тоді}$$

$$a = x + y + z - (b + c) = y + z - x,$$

$$b = x + y + z - (a + c) = x + z - y,$$

$$c = x + y + z - (a+b) = x + y - z.$$

Розглянемо ліву частину початкової нерівності, маємо:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}=\frac{y+z-x}{2x}+\frac{x+z-y}{2y}+\frac{x+y-z}{2z}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{y}{x}+\frac{z}{x}-1+\frac{x}{y}+\frac{z}{y}-1+\frac{x}{z}+\frac{y}{z}-1\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{y}+\frac{y}{z}\right)-\frac{3}{2}.$$

Використаємо, що сума двох взаємно обернених додатних чисел a і b не менша за 2, тобто $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2$. Тоді: $\frac{1}{2}\left(\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{y}+\frac{y}{z}\right)-\frac{3}{2}\geq\frac{1}{2}\cdot 2+\frac{1}{2}\cdot 2+\frac{1}{2}\cdot 2-\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$. Отже,

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}.$$

Практичне заняття. Завдання для самостійного розв'язання

1. Доведіть, що $10x^2-6x+2xy+y^2+2>0$ при всіх дійсних значеннях x і y.
2. Доведіть, що $x^2+y^2+1\geq xy+x+y$ при всіх дійсних значеннях x і y.
3. Доведіть нерівність $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq\frac{1}{\sqrt{ab}}+\frac{1}{\sqrt{ac}}+\frac{1}{\sqrt{bc}}$, якщо $a>0$, $b>0$, $c>0$.
4. Доведіть, що $a^4+b^4+c^4\geq abc(a+b+c)$ при всіх дійсних значеннях a, b, c.
5. Довести нерівність $(a+2)(b+6)(c+3)\geq 48\sqrt{abc}$, якщо $a\geq 0$, $b\geq 0$, $c\geq 0$.
6. Знайдіть найбільше значення виразу xy, якщо $x>0$, $y>0$ і $3x+4y=24$.
7. Знайдіть найменше значення виразу $3x+y$, якщо $x>0$, $y>0$ і $xy=3$.
8. Доведіть, що коли $a>0$, $b>0$, $c>0$, то $\frac{c+a}{b}+\frac{c+b}{a}+\frac{a+b}{c}\geq 6$.
9. Доведіть нерівність $\sqrt{x^2+(1-y)^2}+\sqrt{(1-x)^2+y^2}\geq\sqrt{2}$.
10. Для довільного дійсного x доведіть нерівність $|x-2|+|x-6|\geq 4$. Знайдіть значення x, при яких виконується рівність.
11. Довести, що $(a^4+b^4+c^4)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\geq(a+b+c)^2$, якщо $a>0$, $b>0$, $c>0$.
12. Довести нерівність $\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1}\leq 9$ при умові, що $a+b+c=6$.
13. Доведіть, що $3^n>4n+1$, якщо $n\in N$ і $n\geq 3$.
14. Довести, що коли $a>0$, $b>0$, $c>0$, то $\frac{a^4}{b^3}+\frac{b^4}{c^3}+\frac{c^4}{a^3}\geq a+b+c$.

15. Доведіть, що коли $a > b > c$, то $\frac{a^2}{a-b} + \frac{b^2}{b-c} > a + 2b + c$.

16. Довести, що коли $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, то $\frac{a^2}{b+2c} + \frac{b^2}{c+2a} + \frac{c^2}{a+2b} \geq \frac{a+b+c}{3}$.

17. Довести, що коли $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, то $\frac{a^3}{b+c} + \frac{b^3}{c+a} + \frac{c^3}{a+b} \geq \frac{a^2+b^2+c^2}{2}$.

18. Доведіть нерівність $\frac{2}{1} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{6}{5} \cdot \ldots \cdot \frac{122}{121} < 11$.

19. Довести нерівність $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} < 1$, при $n \in N$.

20. Довести нерівність $\frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \ldots + \frac{1}{(2n+1)^2} < \frac{1}{4}$, $n \in N$.

Контрольна робота.

1. Доведіть, що $x^2 - 4x + y^2 + 2y + 5 \geq 0$ при всіх дійсних значеннях x і y.
2. Доведіть, що $a^8 + b^8 \geq a^7 b + ab^7$ при всіх дійсних значеннях a і b.
3. Доведіть нерівність $\left(\frac{a}{b}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 \geq \frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a}$ при будь-яких значеннях a, b, c.
4. Довести нерівність $(a+4)(b+1)(c+4) \geq 32\sqrt{abc}$, якщо $a \geq 0$, $b \geq 0$, $c \geq 0$.
5. Знайдіть найбільше значення виразу xy, якщо $x > 0$, $y > 0$ і $3x + 4y = 24$.
6. Знайдіть найменше значення виразу $x + 2y$, якщо $x > 0$, $y > 0$ і $xy = 2$.
7. Доведіть нерівність $(x^2 + 9)(y^4 + 16) \geq 48xy^2$, якщо $x \geq 0$, $y \geq 0$.
8. Довести, що $(a^3 + b^3 + c^3)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq (a+b+c)^2$, якщо $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$.
9. Довести нерівність $\sqrt{2a+1} + \sqrt{2b+1} + \sqrt{2c+1} \leq 5$ при умові, що $a + b + c = \frac{8}{3}$.
10. Довести, що коли $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, то $\frac{a^4}{b^3} + \frac{b^4}{c^3} + \frac{c^4}{a^3} \geq a + b + c$.
11. Доведіть нерівність $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{79}{80} < \frac{1}{9}$.
12. Доведіть, що коли $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, то $\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} < 2$.

Методи обчислення сум. Лекційно-практичне заняття

Розглянемо суму послідовних натуральних чисел $S_1 = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$, яка обчислюється за формулою $S_1 = \frac{n(n+1)}{2}$.

Приклад 1. Обчислити суму послідовних натуральних чисел від 1 до 100.

Розв'язання. S= 1+2+3+...+99+100= (1+100)+(2+99)+(3+98)+...+(50+51)=101*50=5050. Можна було б обчислити за формулою.

Розглянемо суму квадратів послідовних натуральних чисел $S_2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$***, яка обчислюється за формулою*** $S_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$**.**

Для обчислення даної суми розглянемо формулу:

$(m+1)^3 = m^3 + 3m^2 + 3m + 1$, запишемо цю формулу по іншому

$(m+1)^3 - m^3 = 3m^2 + 3m + 1$.

Підставляючи в останню рівність числа від 1 до n, одержимо n рівностей, які додамо:

m=1, $2^3 - 1^3 = 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1$,

m=2, $3^3 - 2^3 = 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 1$,

m=3, $4^3 - 3^3 = 3 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 + 1$,

\+ ....,

m=n, $(n+1)^3 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1$.

$(n+1)^3 - 1^3 = 3S_2 + 3S_1 + n$, звідси ми знайдемо S_2,

$$\text{маємо: } 3S_2 = (n+1)^3 - 1^3 - 3\frac{n(n+1)}{2} - n,$$

$$3S_2 = (n+1)^3 - (n+1) - 3\frac{n(n+1)}{2},$$

$$3S_2 = (n+1)\left[(n+1)^2 - 1 - \frac{3n}{2}\right],$$

$$3S_2 = (n+1)\left(n^2 + 2n + 1 - 1 - \frac{3n}{2}\right),$$

$$3S_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2},$$

$$\text{шукана сума: } S_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Розглянемо суму кубів послідовних натуральних чисел $S_3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3$**,** ***яка обчислюється за формулою*** $S_2 = S_1^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ **.**

Доведення

1спосіб

Аналогічно попередньому потрібно розглянути формулу:

$(m+1)^4=m^4+4m^3+6m^2+4m+1$.

2 спосіб

Це досить цікавий і оригінальний метод.

$1^3=1^2$,

$1^3+2^3=(1+2)^2=9$,

$1^3+2^3+3^3=(1+2+3)^2=36$,

$1^3+2^3+3^3+4^3=(1+2+3+4)^2=100$,

і т.д.

Ми бачимо, що $S_3=1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=(1+2+3+\ldots+n)^2=S_1^2=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$ (1)

Далі використаємо доведення методом математичної індукції.

1) Припустимо, що при n=к дана рівність справджується, тобто:

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+\kappa^3=\frac{\kappa^2(\kappa+1)^2}{4} \qquad (2)$$

2) Доведемо, що при n=к+1 рівність (1) виконується. Додамо до обох частин рівності (2) вираз $(\kappa+1)^3$, маємо :

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+\kappa^3+(\kappa+1)^3=\frac{\kappa^2(\kappa+1)^2}{4}+(\kappa+1)^3=\frac{(\kappa+1)^2(\kappa+2)^2}{4}.$$

Таким чином формула (1) справедлива для будь-якого n.

Для знаходження $S_\kappa=1^\kappa+2^\kappa+3^\kappa+\ldots+n^\kappa$ потрібно розглядати формулу для $(m+1)^{\kappa+1}$, а далі аналогічно, як і в другому типі.

Розглянемо приклади в яких розглядається загальний член суми.

Приклад 2. Обчислити $1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\ldots+n(n+1)$.

Розв'язання. Розглянемо загальний член суми $n(n+1)=n^2+n$. Подамо кожний доданок суми по іншому, підставивши в загальний член суми замість n натуральні числа від 1 до n.

Маємо: S=$1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+...+n(n+1)$=($1^2$+1)+($2^2$+2)+($3^2$+3)+...+($n^2$+n)=

$$=(1^2+2^2+3^2+...+n^2)+(1+2+3+...+n)=S_2+S_1=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}=$$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1+3)}{6}=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

Приклад 3. Обчислити: S=3+6+11+20+37+...+(2^n+n).

Розв'язання. Розглянемо загальний член суми 2^n+n, щоб знайти перший доданок число 3, потрібно замість n підставити 1;
щоб знайти другий доданок число 6, потрібно замість n підставити 2 і т.д.
Таким чином маємо:

$$S=3+6+11+20+37+...+(2^n+n)=(2^1+1)+(2^2+2)+(2^3+3)+...+(2^n+n)=$$
$$=(\underbrace{2^1+2^2+2^3+...+2^n}_{})+(1+2+3+...+n)=\frac{2(2^n-1)}{2-1}+S_1=2^{n+1}-2+\frac{n(n+1)}{2}=2^{n+1}+\frac{n^2+n-4}{2}$$

Геометрична прогресія

Розглянемо завдання в яких потрібно побачити, що один із множників кожного доданку домножається на одне й те ж число.

Приклад 4. Обчислити $S=1\cdot3+3\cdot3^2+5\cdot3^3+...+(2n-1)3^n$.

Розв'язання. Позначимо початкову рівність (1). Щоб обчислити цю суму потрібно помножити рівність (1) на 3, маємо: $3S=1\cdot3^2+3\cdot3^3+5\cdot3^4+...+(2n-1)3^{n+1}$ (2)

Віднімемо від першої рівності другу, маємо :

$$S-3S=1\cdot3+2\cdot3^2+2\cdot3^3+...+2\cdot3^n-(2n-1)3^{n+1},$$

$$-2S=3+2\cdot\left(\underbrace{3^2+3^3+...+3^n}_{геометрична\ прогресія}\right)-(2n-1)3^{n+1},$$

$$-2S=3+2\frac{3^2(3^{n-1}-1)}{3-1}-(2n-1)3^{n+1},$$

$$-2S=3+3^{n+1}-9-(2n-1)3^{n+1},$$

$$2S=(2n-1-1)3^{n+1}+6,$$

$$S=(n-1)3^{n+1}+3.$$

Приклад 5. Обчислити суму послідовності загальний член якої виражається формулою $a_n = \frac{n}{2^n}$.

Розв'язання. Запишемо a_n у вигляді: $a_n = \frac{n}{2^n} = n \cdot \frac{1}{2^n}$.

Складаємо суму, підставляючи замість n числа від 1 до n, маємо:

$$S = 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2^2} + 3 \cdot \frac{1}{2^3} + \ldots + n \cdot \frac{1}{2^n}.$$

Щоб обрахувати цю суму, помножимо на $\frac{1}{2}$, маємо:

$$\frac{1}{2}S = 1 \cdot \frac{1}{2^2} + 2 \cdot \frac{1}{2^3} + 3 \cdot \frac{1}{2^4} + \ldots + n \cdot \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Віднявши від першої рівності другу, отримуємо:

$$S - \frac{1}{2}S = \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^n}}_{\text{геометрична прогресія}} - n \cdot \frac{1}{2^{n+1}},$$

$$\frac{1}{2}S = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^n} - 1\right)}{\frac{1}{2} - 1} - n \cdot \frac{1}{2^{n+1}},$$

$$\frac{1}{2}S = 1 - \frac{1}{2^n} - \frac{n}{2^{n+1}},$$

$$S = 2 - \frac{2}{2^n} - \frac{n}{2^n}, \text{ остаточна відповідь } S = 2 - \frac{2+n}{2^n}.$$

Розглянемо приклад іншого методу.

Приклад 6. Обчисліть суму: $S = 1 + 11 + 111 + \ldots + \underbrace{11\ldots1}_{n \text{ раз}}$.

Розв'язання. Для того, щоб обчислити дану суму ми повинні знати слідуючі перетворення :

$$1 = \frac{10-1}{9},\ 11 = \frac{10^2-1}{9},\ 111 = \frac{10^3-1}{9},\ \ldots,\ \underbrace{11\ldots1}_{n \text{ раз}} = \frac{10^n-1}{9}$$

Підставивши в початкову рівність, маємо :

$$S = 1 + 11 + 111 + \ldots + \underbrace{11\ldots1}_{n \text{ раз}} = \frac{10-1}{9} + \frac{10^2-1}{9} + \frac{10^3-1}{9} + \ldots + \frac{10^n-1}{9} =$$

$$= \frac{1}{9}\left(\left(10 + 10^2 + 10^3 + \ldots + 10^n\right) - \left(\underbrace{1+1+1+\ldots+1}_{n \text{ раз}}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{9}\left(\frac{10\left(10^n-1\right)}{10-1} - n\right) = \frac{1}{81}\left(10^{n+1} - 9n - 10\right).$$

Розглянемо метод «залишаються крайні».

Приклад 7. Обчисліть: $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{49\cdot 50}$.

Розв'язання. Щоб обрахувати цю суму представимо кожний дріб, як різницю двох дробів, маємо:

$$S = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{49\cdot 50} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{49} - \frac{1}{50}\right) = \frac{1}{1} - \frac{1}{50} = \frac{49}{50.}$$

Приклад 8. Обчисліть: $\frac{4}{5\cdot 7} + \frac{4}{7\cdot 9} + \frac{4}{9\cdot 11} + \ldots + \frac{4}{(2n+3)(2n+5)}$. Щоб обрахувати цю суму представимо кожний дріб, як різницю двох дробів, помножену на 2, маємо :

$$S = \frac{4}{5\cdot 7} + \frac{4}{7\cdot 9} + \frac{4}{9\cdot 11} + \ldots + \frac{4}{(2n+3)(2n+5)} = 2\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) + 2\left(\frac{1}{7} - \frac{1}{9}\right) +$$

$$+ 2\left(\frac{1}{9} - \frac{1}{11}\right) + \ldots + 2\left(\frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2n+5}\right) = 2\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{2n+5}\right) = 2\cdot\frac{2n+5-5}{5(2n+5)} = \frac{4n}{5(2n+5)}.$$

Практичне заняття. Завдання для самостійного розв'язання

№1(до першого типу). Обчислити:

а) 2+4+6+8+…+1000; б) 11+21+31+…+991+1001; в) 3+6+9+12+…+3n.

№2 (до другого і третього типів).Обчислити:

а) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 2003^2$; б) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + 2003^3$;

в) $S_n = 2^3 + 4^3 + 6^3 + \ldots + (2n)^3$; г) $S_n = 1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots + (2n-1)^3$.

№3 (до четвертого типу). Обчислити:

а) $1\cdot 4 + 2\cdot 7 + 3\cdot 10 + \ldots + n(3n+1)$; б) $1\cdot 2\cdot 3 + 2\cdot 3\cdot 5 + 3\cdot 4\cdot 7 + \ldots + n(n+1)(2n+1)$;

в) $2 + 14 + 62 + \ldots + (4^k - 2)$; г) $1\cdot 2^2 + 2\cdot 3^2 + 3\cdot 4^2 + \ldots + (n-1)\cdot n^2$.

№4 (до п’ятого типу).Обчислити:

а) $1\cdot 4+2\cdot 4^2+3\cdot 4^3+\ldots+n\cdot 4^n$;

б) обчисліть суму послідовності загальний член якої виражається формулою $\frac{n}{3^n}$.

в) $1\cdot 5+3\cdot 5^2+5\cdot 5^3+\ldots+(2n-1)\cdot 5^n$; г) $x+2x^2+3x^3+\ldots+n\cdot x^n$.

№5 (до шостого типу). Обчислити:

а) $7+77+777+\ldots+\underbrace{77\ldots7}_{n\ раз}$;

б) Розв’яжіть рівняння $0,(6)x=3+33+333+\ldots+\underbrace{33\ldots3}_{n\ раз}$;

в) Доведіть рівність $\left(\underbrace{66\ldots6}_{n\ раз}\right)^2+\underbrace{88\ldots8}_{n\ раз}=\underbrace{44\ldots4}_{2n\ раз}$;

г) Обчисліть при n≥3, $\sqrt{\underbrace{44\ldots4}_{2n\ раз}+\underbrace{11\ldots1}_{n+1\ раз}-\underbrace{66\ldots6}_{n\ раз}}$.

№6 (до сьомого типу). Обчислити:

а) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{99\cdot 100}$; б) $\frac{49}{2\cdot 9}+\frac{49}{9\cdot 16}+\frac{49}{16\cdot 23}+\ldots+\frac{49}{65\cdot 72}$;

в) $\frac{1}{3\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 11}+\frac{1}{11\cdot 15}+\ldots+\frac{1}{201\cdot 205}$; г) $\frac{1}{2\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 12}+\frac{1}{12\cdot 17}+\ldots+\frac{1}{(5n-3)(5n+2)}$;

д) Розв’яжіть рівняння 0,(2)x=$\frac{2}{2\cdot 4}+\frac{2}{4\cdot 6}+\frac{2}{6\cdot 8}+\ldots+\frac{2}{48\cdot 50}$.

Контрольна робота.

1) Обчислити $1^3+2^3+3^3+\ldots+2011^3$.
2) Обчислити суму $1\cdot 2^2+2\cdot 3^2+3\cdot 4^2+\ldots+(n-1)\cdot n^2$.
3) Обчислити суму $x+2x^2+3x^3+\ldots+n\cdot x^n$.
4) Розв’яжіть рівняння $0,(6)x=3+33+333+\ldots+\underbrace{33\ldots3}_{n\ раз}$.
5) Доведіть рівність $\left(\underbrace{66\ldots6}_{n\ раз}\right)^2+\underbrace{88\ldots8}_{n\ раз}=\underbrace{44\ldots4}_{2n\ раз}$.

6) Обчислити $\frac{1}{3\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 11}+\frac{1}{11\cdot 15}+...+\frac{1}{201\cdot 205}$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

I – Основні джерела:

1. Гайштут О.Г., Литвиненко Г.М. Розв'язування алгебраїчних задач.-К.: Радянська школа, 1991.-221с.
2. Горделадзе Ш.Г., Кухарчук М.М., Яремчик Ф.П. Збірник конкурсних задач з математики: навчальний посібник третє видання.-К.: Вища школа, 1998.-328 с.
3. Задачі на подільність (методичні рекомендації). Укладач Погрібний В.Д. –К.: ІЗМН, 1996. – 32 с.
4. Збірник завдань для державної підсумкової атестації з математики. Алгебра 9 клас/ За редакцією З.І. Слєпкань; -Харків: Гімназія, 2002.-143 с.
5. Коваленко В.Г., Кривошеев В.Я., Лемберский Л.Я. Алгебра: Эксперементальное учебное пособие для 8кл. шк. с углубленным изучением математики и специализированых школ физико-математического профиля.-К.: Радянська школа , 1990. -288 с.
6. Кушнир И. Неравенства. –К.: Астарта, 1996. -541 с.
7. Лей фура В. М., Мітель ман І. М. Розв'язуємо разом. –Х.: Видавнича група «Основа», 2003. – 141с.
8. Мерзляк А. Г., Полянський В. Б., Якір М. С. Алгебра: Підручник для 9 кл. з поглибленим вивченням математики. – Х. : Гімназія, 2009. -384 с.
9. Моргун О.О., Фурман М.С. Алгебра 9 клас: Поглиблене вивчення. –Х.: Основа, 2006. -220.
10. Померанцева Л.И. Проведение факультативних занятий по математике на тему «Делимость и простые числа». – Черкассы : 1982. -34 с.
11. Сивашинский И. Х. Задачи по математике для внекласных занятий. – М. : Просвещение, 1968. -311с.

II – Додаткові джерела:

1. Вишенський В.А., Перестюк М.О., Самійленко А.М. Задачі з математики.-К.: Вища школа, 1985.-262с.
2. Галицкий М.Л., Мошкович М.М., Шварцбурд С.И. Углубленное изучение курса алгебры и математического анализа.-М.: «Просвещение», 1990.-352 с.
3. Галицкий М.Л., Гольдман А.М., Звавич Л.И. Сборник задач по алгебре: Учебное пособие для 8-9 кл. с углубленным изучением математики. -М.: «Просвещение», 2006.-300 с.

4. Збірник задач з математики для вступників до втузів/В.К. Єгерев, В.В. Зайцев, Б.А. Кордемський та ін.; За редакцією М.І. Сканаві;-К.: Вища школа, 1992.-445 с.
5. Ивлев Б.М., Абрамов А.М., Дудницын Ю.П., Шварцбурд С.И. Задачи повышеной трудности по алгебре и началам анализа.
6. Сарана О. А. Математичні олімпіади. – К. Вид. А.С.К., 2004. -340 с.
7. Шарыгин И.Ф. Факультативный курс по математике 10 класс. - М.: Просвещение, 1989.-350 с.
8. Ясінський В.В. Математика. Методичний посібник для слухачів ІДП НТУУ «КПІ»/ За редакцією чл.-кор. НАН В.С. Мельника – К.: НТУУ «КПІ», 2003-324 с.

ІІІ – Інтернет-ресурси:

1. http://www.kharkivosvita.net.ua/files/metod_posibnuk.doc
2. http://www.nbuv.gov.ua
3. http://www.ippo.if.ua
4. http://veja.com.ua/bpal/young_talent.doc
5. http://sxz.mylivepage.com

Видання підготовлено до друку та віддруковано
редакційно-видавничим відділом ЧОІПОПП
Зам. № 1255 Тираж 100 пр.
18003, Черкаси, вул. Бидгощська, 38/1